

Curso Análise de Estruturas Isostáticas

CANAL O CALCULISTA



- Vigas
- Pórticos
- Vigas Gerber
- Treliças
- Grelhas

Introdução (Aula 01)

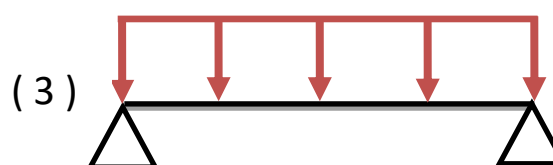
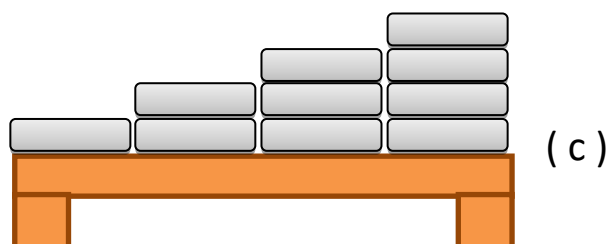
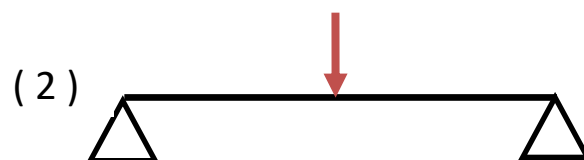
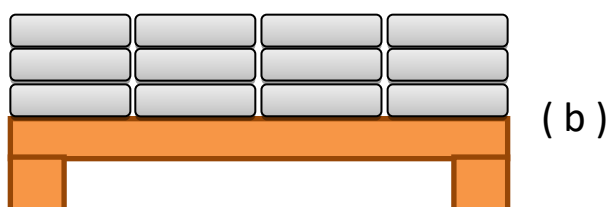
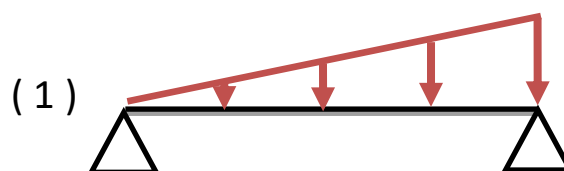
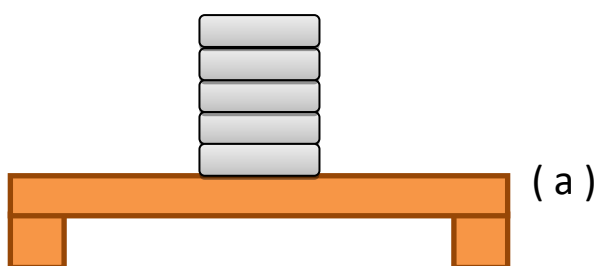
Neste Curso de Análise de Estruturas Isostáticas, iremos abordar os modelos isostáticos mais recorrentes nas faculdades de Engenharia, de Arquitetura e em concursos públicos, que são as **Vigas**, **Pórticos**, **Vigas Gerber**, **Treliças** e **Grelhas**.

Para entendermos definitivamente e analisar corretamente estes tipos de estruturas, vamos relembrar conceitos e definições importantes, assim tudo ficará mais fácil.

1. As Estruturas Isostática

Os “desenhos” que são apresentados para nós na cadeira de Isostática são nada mais que Modelos Matemáticos que representam estruturas reais. Através destes Modelos Matemáticos é que somos capazes de determinar os esforços envolvidos nas estruturas.

Vejamos os exemplos a seguir, relacionando a Estrutura real com o Modelo Matemático que a representa, (Desconsidere o peso próprio da viga):



Gabarito: A-2; B-3 ; C-1

Os esforços que somos capazes de determinar através destes Modelos Matemáticos são: os esforços externos (Reações de Apoio), os Esforços Internos, elaborar os Diagramas de Esforços Cortantes, dos Esforços Normais, de Momento Fletor, e através deles dimensionar a nossa estrutura.

Existem três tipos de estruturas, as HIPOSTÁTICAS, ISOSTÁTICAS E HIPERESTÁTICAS, para aprendermos a classificá-las vamos conhecer os Apoios e suas Reações.

1.1 - Apoios

Os apoios têm a função de restringir os graus de liberdade das estruturas através de suas reações de apoio. Nas estruturas planas, existem três graus de liberdade:

1° - Translação no eixo X;

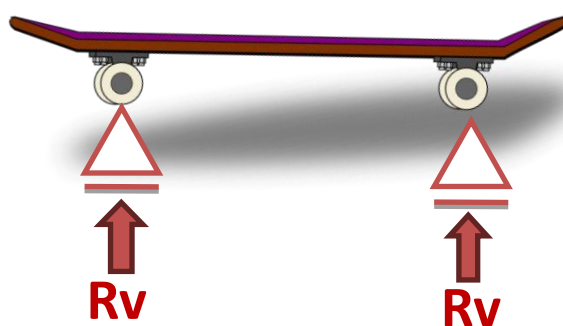
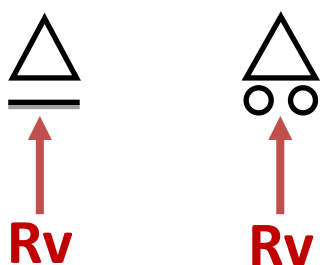
2° - Translação no eixo Y;

3° - Rotação.

1.1.1 – Apoio simples de 1° gênero.



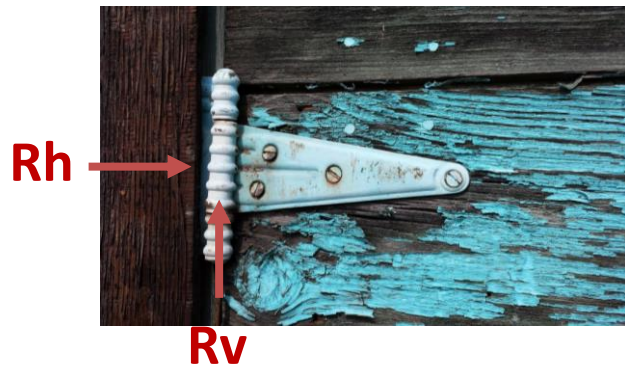
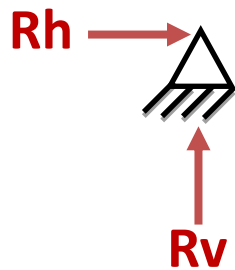
Os apoios do 1° gênero são aqueles que restringem os esforços em apenas **uma** direção, ou seja, em um só eixo (eixo X ou Y). Permite a translação no outro eixo e a rotação. Tendo assim, apenas **uma reação de apoio**. Um exemplo para entendermos melhor é um Skate.



1.1.2 – Apoio de 2° gênero.



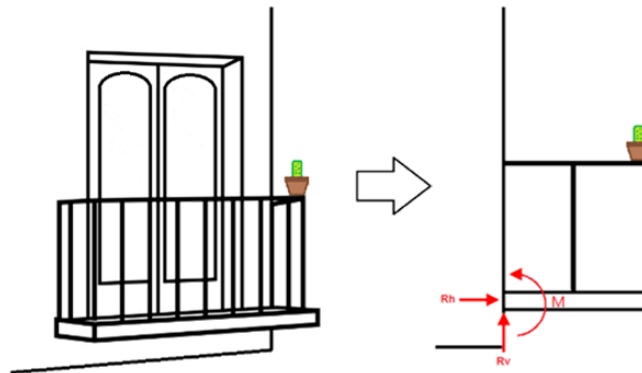
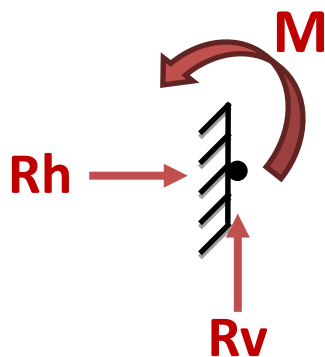
Os apoios do 2° gênero são aqueles que restringem os esforços em **duas** direções, ou seja, em dois eixos (eixo X ou Y). Não permite a translação, porém permite a rotação. Tendo assim, **duas reações de apoio**. Um exemplo para entendermos melhor são as dobradiças das portas.



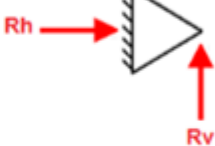
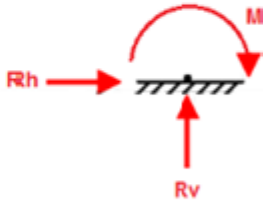
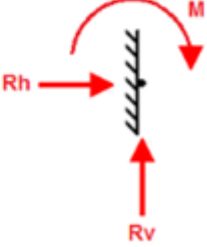
1.1.3 – Apoio de 3º gênero.



Os apoios de 3º gênero também conhecidos como engastes, são aqueles que restringem os esforços em duas direções, ou seja, nos dois eixos (eixo X e Y) e não permitem rotação. Tendo assim, três reações de apoio. Um exemplo para entendermos melhor são as varandas de um prédio.



Apoio	Símbolos	Reações de apoio
Apoio simples de 1º gênero vertical		
Apoio simples de 1º gênero horizontal		

Apoio	Símbolos	Reações de apoio
Apoio de 2º gênero vertical		
Apoio de 2º gênero horizontal		
Apoio de 3º gênero vertical (engaste)		
Apoio de 3º gênero horizontal (engaste)		

1.2 – Classificação da Estrutura (Aula 02)

Agora que já conhecemos os apoios e suas respectivas reações, vamos aprender a classificar as estruturas. Como dito anteriormente, existem três tipos de classificação da estabilidade da estrutura: Hipostática, Isostática e Hiperestática, para determinarmos precisamos verificar 4 fatores:

- Condições de Equilíbrio;
- Graus de Liberdade;
- Apoios;
- Estabilidade e estaticidade.

Para uma estrutura ser classificada com **HIPOSTÁTICA**, o número de reações de apoio deverá ser **MENOR** que o número das Equações da Estática (Três equações), ou quando os apoios são insuficientes para garantir sua estabilidade. Veremos exemplos a seguir.

Para que uma estrutura seja classificada como **ISOSTÁTICA** é preciso que o número de restrições (Reações de Apoio) seja rigorosamente **IGUAL** ao número de equações da estática no plano que são **três**:

$\sum F_x = 0 \rightarrow$ Somatório das forças na direção horizontal igual a zero.

$\sum F_y = 0 \rightarrow$ Somatório das forças na direção vertical igual a zero

$\sum M_o = 0 \rightarrow$ Somatório dos momentos no Ponto O igual a zero.

Outro fator é que a estrutura tenha restrição tanto de TRANSLAÇÃO NO EIXO X, TRANSLAÇÃO NO EIXO Y E ROTAÇÃO.

Para que uma estrutura seja classificada com **HIPERESTÁTICA** é preciso que o número de restrições (Reações de Apoio) seja **MAIOR** que o número de Equações da Estática.

Em resumo:

- N° de Reações de Apoio < N° de Equações da Estática = HIPOSTÁTICA;
- N° de Reações de Apoio = N° de Equações da Estática = ISOSTÁTICA;
- N° de Reações de Apoio > N° de Equações da Estática = HIPERESTÁTICA;

Usaremos seguinte equação para a classificação da estrutura:

$$Gh = \text{N° de Incógnitas} - (\text{N° de Eq. do Plano} + \text{N° Inc. das Rótulas})$$

Vamos para os exemplos:

Exemplo 1:



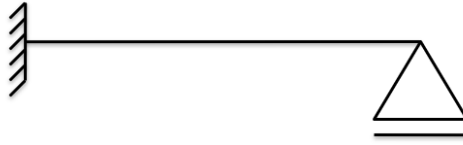
$$Gh = \text{N° de Incógnitas} - (\text{N° de Eq. do Plano} + \text{N° Inc. das Rótulas})$$

Exemplo 2:



$$Gh = \text{N° de Incógnitas} - (\text{N° de Eq. do Plano} + \text{N° Inc. das Rótulas})$$

Exemplo 3:



$$Gh = N^{\circ} \text{ de Incógnitas} - (N^{\circ} \text{ de Eq. do Plano} + N^{\circ} \text{ Inc. das Rótulas})$$

Exemplo 4:



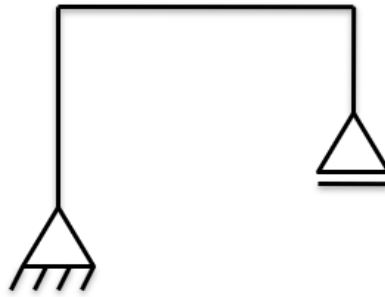
$$Gh = N^{\circ} \text{ de Incógnitas} - (N^{\circ} \text{ de Eq. do Plano} + N^{\circ} \text{ Inc. das Rótulas})$$

Exemplo 5:



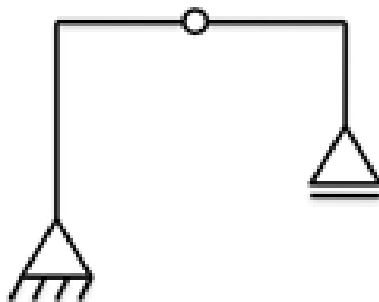
$$Gh = N^{\circ} \text{ de Incógnitas} - (N^{\circ} \text{ de Eq. do Plano} + N^{\circ} \text{ Inc. das Rótulas})$$

Exemplo 6:



$$Gh = N^{\circ} \text{ de Incógnitas} - (N^{\circ} \text{ de Eq. do Plano} + N^{\circ} \text{ Inc. das Rótulas})$$

Exemplo 7:

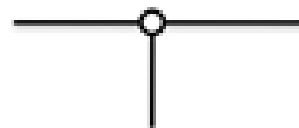


Rótulas



$$N^{\circ} \text{ Inc.} = N^{\circ} \text{ de Barras} - 1$$

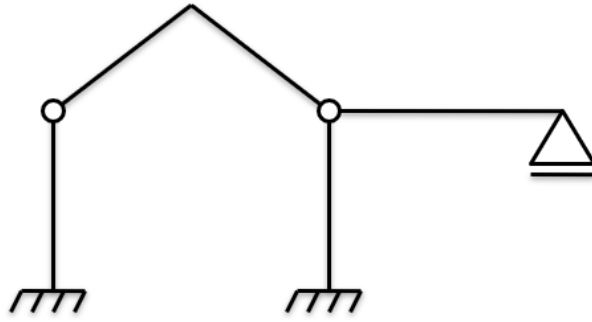
$$N^{\circ} \text{ Inc.} = 2 - 1 = 1 \text{ Incógnita}$$



$$N^{\circ} = N^{\circ} \text{ de Barras} - 1$$

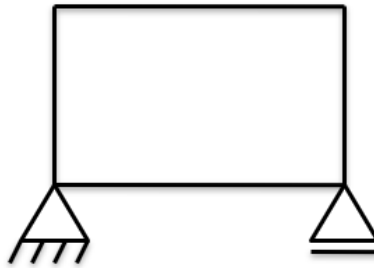
$$Gh = N^{\circ} \text{ de Incógnitas} - (N^{\circ} \text{ de Eq. do Plano} + N^{\circ} \text{ Inc. das Rótulas})$$

Exemplo 8:



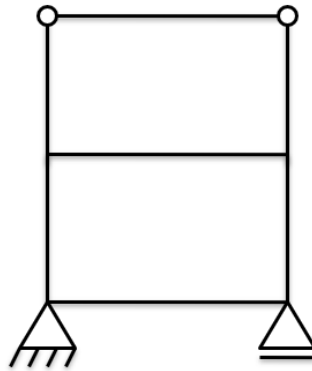
$$Gh = \text{N}^\circ \text{ de Incógnitas} - (\text{N}^\circ \text{ de Eq. do Plano} + \text{N}^\circ \text{ Inc. das Rótulas})$$

Exemplo 9:



$$Gh = \text{N}^\circ \text{ de Incógnitas} - (\text{N}^\circ \text{ de Eq. do Plano} + \text{N}^\circ \text{ Inc. das Rótulas})$$

Exemplo 10:



$$Gh = N^{\circ} \text{ de Incógnitas} - (N^{\circ} \text{ de Eq. do Plano} + N^{\circ} \text{ Inc. das Rótulas})$$

1.3– CARGAS (Aula 03)

Na análise estrutural as cargas têm as seguintes classificações de acordo com a sua forma de atuação:

- Cargas permanentes;
- Cargas acidentais;
- Cargas móveis.

As cargas permanentes têm posição de atuação fixa sobre a estrutura e mantêm-se durante toda a sua vida útil, como por exemplo, o peso próprio.

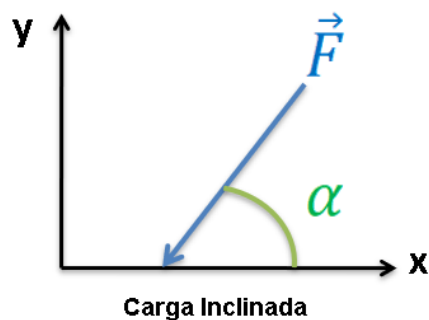
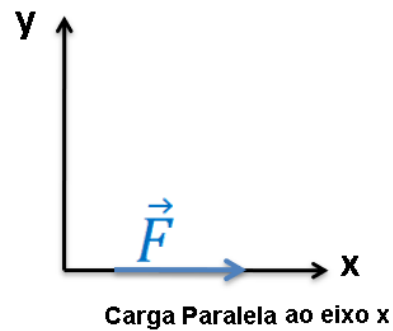
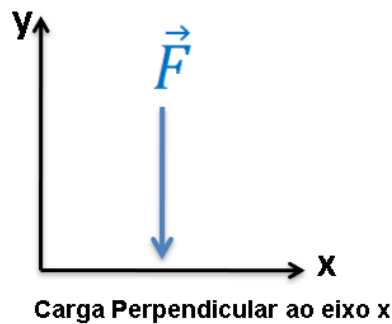
As cargas acidentais atuam sobre uma posição fixa na estrutura, porém sua atuação é intermitente, ou seja, variam de acordo com a situação como, por exemplo, a carga de vento, a carga de ocupação de um edifício, entre outras.

As cargas móveis são aquelas que não possuem posição fixa e sua atuação é intermitente, como um veículo passando sobre uma ponte.

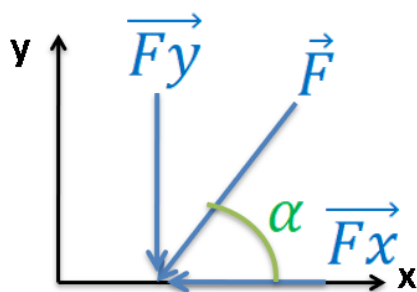
Essas cargas podem ser representadas como **CARGAS PONTUAIS** ou **CARGAS DISTRIBUÍDAS**.

1.3.1 – Cargas Pontuais

As cargas pontuais representam a força exercida por um elemento em um único ponto, onde é representada por uma seta, indicando sua direção e sentido, podendo ser perpendicular, paralela ou inclinada ao eixo.



Uma carga pontual inclinada é a resultante de uma carga horizontal com uma carga vertical, para determiná-las precisamos fazer a decomposição de forças:



$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}$$

$$F_x = F \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{F_y}{F}$$

$$F_y = F \sin \alpha$$

Neste exemplo as forças F_x e F_y seriam:

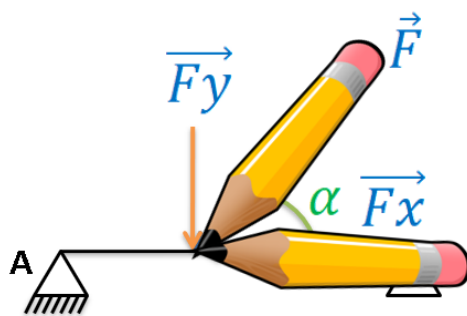
$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} \rightarrow F_x = F \cdot \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{F_y}{F} \rightarrow F_y = F \cdot \sin \alpha$$

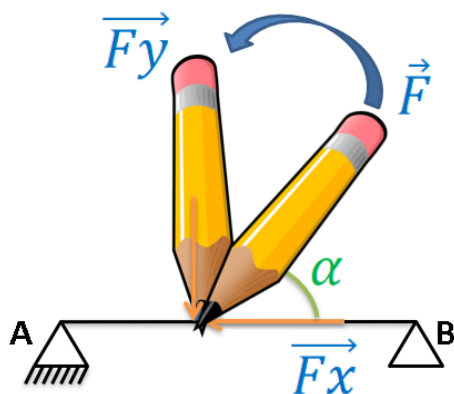
Porém há um jeito bem mais simples de encontrarmos os valores:

Veja na videoaula a explicação:

Dica:



- $F_x =$
- $F_x = F$ com o ângulo
- $F_x = F \times \cos \alpha$



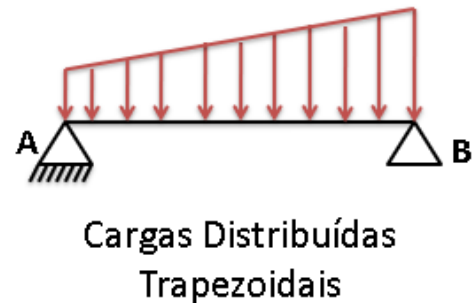
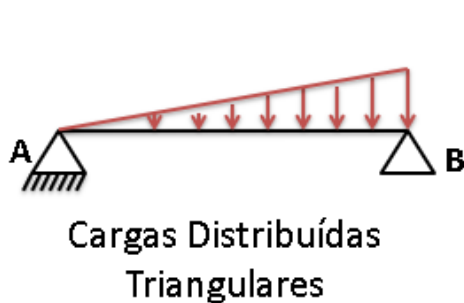
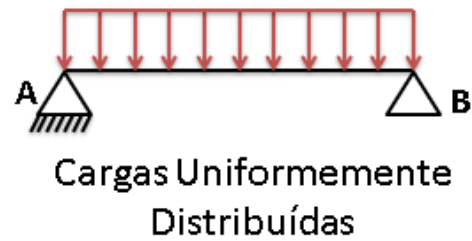
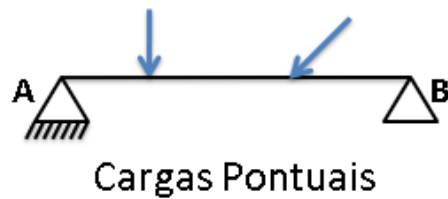
- $F_y =$
- $F_y = F$ sem o ângulo
- $F_y = F \times \sin \alpha$

Agora pratique!!!

1.3.2 - Cargas distribuídas

As cargas distribuídas representam a força exercida por um elemento em uma determinada distância. São apresentadas por uma unidade de força/distância. As cargas distribuídas representam cargas como o peso próprio, carga de vento, carga de empuxo, carga de revestimento, entre outras.

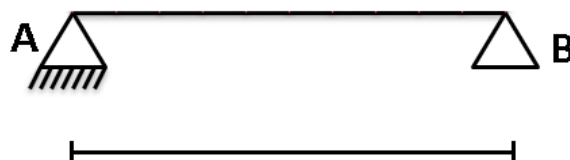
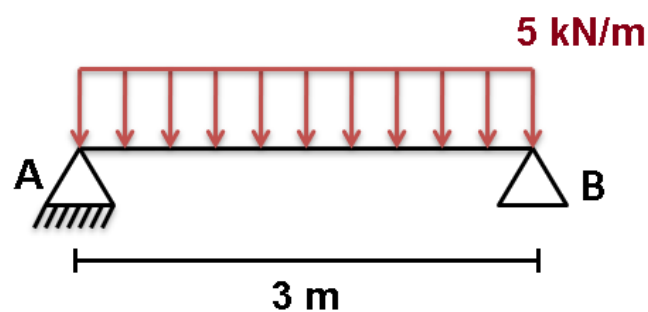
As representações mais comuns são cargas distribuídas retangulares, triangulares e trapezoidais.



Vamos agora aprender a transformar cargas distribuídas em cargas concentradas.

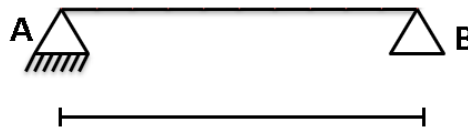
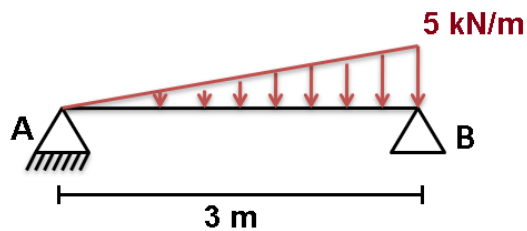
1.3.2.1 – Cargas Distribuídas Retangulares

Para transformar a carga distribuída retangular em carga concentrada é bem simples. Basta multiplicar seu valor pelo comprimento em que ela atua. O posicionamento da carga pontual será na metade do seu comprimento. Ex.:



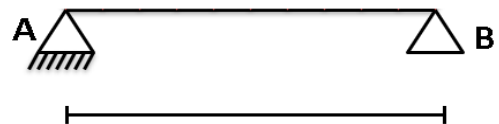
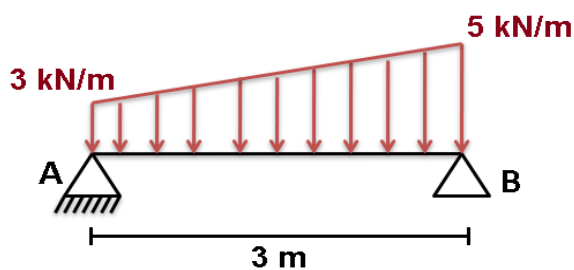
1.3.2.2 – Cargas Distribuídas Triangulares

Para transformar a carga distribuída triangular em carga concentrada devemos calcular a área do triângulo formado, e posicioná-la a $1/3$ de distância do ângulo de 90° . Ex.:



1.3.2.3 – Cargas Distribuídas Trapezoidais

As cargas trapezoidais são a soma de uma carga retangular com uma carga triangular e terá assim duas cargas concentradas. O primeiro passo é dividir a área retangular e a área triangular. Depois encontrar a carga concentrada de cada uma, respeitando suas respectivas regras de posicionamento. Ex.:



1.3.3 - Momento

A tendência de rotação que a força F produz na barra, em relação a um ponto, é chamada de momento (M). A intensidade dessa rotação é dada por:

$$M = F \times d$$

Para forças que não sejam perpendiculares ao eixo, é necessário fazer a decomposição das forças e encontrar seus componentes conforme aprenderemos no início desta aula.

O Momento de uma força é uma grandeza vetorial: possui módulo, direção e sentido. Sendo assim, durante os exercícios adotaremos sentidos positivos e negativos para ele.

1.4 Cálculo de Reação de Apoio (Esforços Externos): (Aula 04)

Como já vimos, as reações de apoio são reações exercidas pelos apoios para combater os esforços solicitantes. Para determiná-las precisamos das 3 equações da estática:

$\sum F_x = 0 \rightarrow$ Somatório das forças na direção horizontal igual a zero.

$\sum F_y = 0 \rightarrow$ Somatório das formas na direção vertical igual a zero

$\sum M_o = 0 \rightarrow$ Somatório dos momentos em O igual a zero.

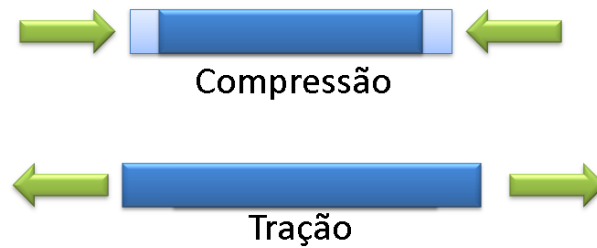
Outra coisa importante é determinação dos sentidos positivos para os esforços verticais, horizontais e momento.

No cálculo dos **Esforços Externos** você poderá defini-los desde que o use durante todo o exercício. Já no cálculo dos **Esforços Internos**, você deverá usar a convenção já existente.

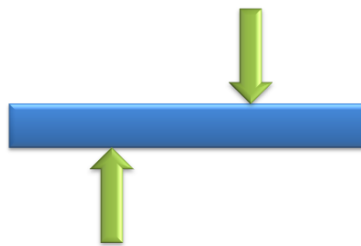
1.5 Cálculo dos Esforços Internos

Os esforços internos de uma seção transversal plana de um elemento estrutural são definidos como um conjunto de forças e momentos estaticamente equivalentes à distribuição de tensões internas sobre a área dessa seção. São eles:

- **N** – Esforço ou força normal (esforço interno axial ou longitudinal) - O esforço de normal representa o efeito de tração ou compressão de uma seção transversal de uma barra.



- **Q** – Esforço ou força cortante (esforço interno transversal) - O esforço cortante será a resultante das forças que atuam no trecho isolado até o ponto em análise no sentido ortogonal à barra. Esse esforço representa o efeito de cisalhamento em uma seção transversal da barra.

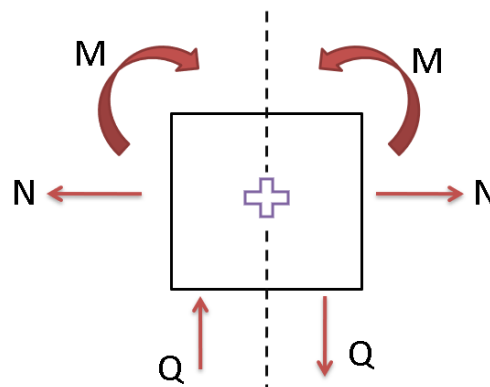


- **M** – Momento Fletor (esforço interno de flexão) - O momento fletor é a resultante Momento de todas as forças e momentos da estrutura isolada até o ponto em análise. Representa o efeito de flexão, em uma seção transversal da barra.

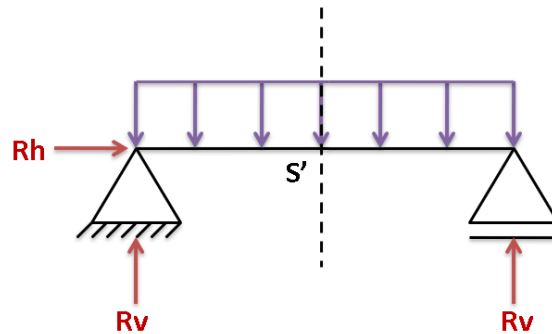


1.5.1 – Determinação dos Esforços Internos

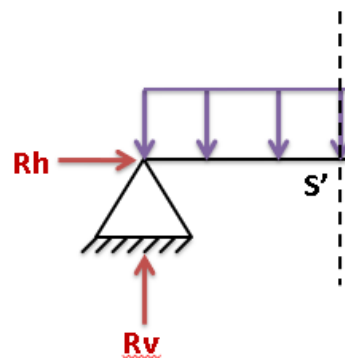
Para a determinação dos esforços internos de uma seção devemos conhecer a convenção dos sinais positivos:



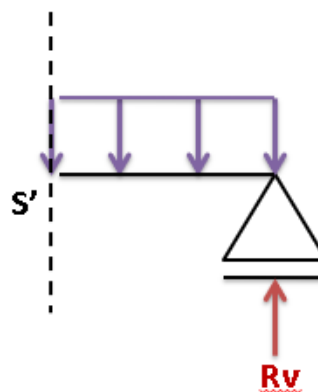
Para utilizá-la você deverá fazer uma seção na estrutura e ocultar um dos lados, o lado retirado deverá ser substituído pelo lado da convenção correspondente. Exemplo:



Ao isolarmos o lado ESQUERDO e apagarmos o lado DIREITO, devemos substituir pela convenção do lado DIREITO.



Ao isolarmos o lado DIREITO e apagarmos o lado ESQUERDO, devemos substituir pela convenção do lado ESQUERDO.



1.5.2 Elaboração dos Diagramas de Esforço Normal, Cortante e Momento Fletor

Após a determinação dos esforços internos dos pontos relevantes é possível a elaboração dos diagramas, os quais serão utilizados na análise e dimensionamento das estruturas. Através dos exercícios dos próximos capítulos vamos aprender a determinar cada esforço interno relevante e a elaborar todos os Diagramas de Esforços Normais, Esforços Cortantes e Diagrama de Momento Fletor.

Curso Análise de Estruturas Isostáticas

CANAL O CALCULISTA



➤ **Módulo II**
Vigas

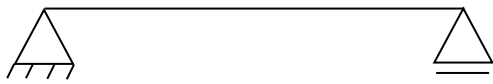
Módulo II – Vigas

Neste módulo falaremos sobre as vigas, aprenderemos como calcular as Reações de Apoio, os Esforços Internos e a elaborar os Diagramas de Esforços Internos (Diagrama de Esforço Normal – **DEN**; Diagrama de Esforço Cortante – **DEC**; e Diagrama de Momento Fletor – **DMF**)

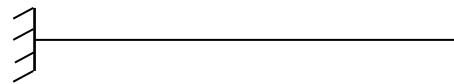
2. As Vigas

As vigas são elementos unifilares, com eixos bem definidos que recebem cargas e as distribuem para seus respectivos apoios. São também um dos principais elementos estruturais na engenharia, servindo como base para o desenvolvimento dos outros componentes estruturais, como pórticos e treliças.

Aqui estão alguns modelos de vigas comumente usadas na Engenharia/Arquitetura:



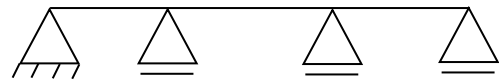
Viga Biapoiada / Simplesmente apoiada



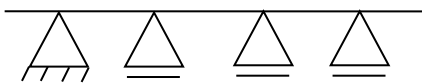
Viga Engastada / Viga em Balanço



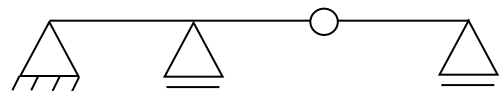
Viga Biapoiada com balanço



Viga contínua



Viga Contínua com balanço

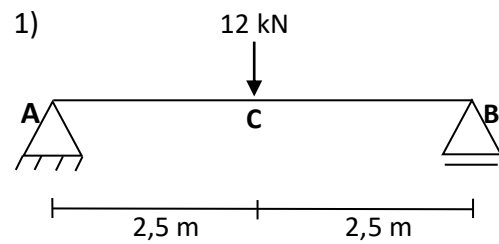


Viga Gerber

Pergunta: Dentre essas estruturas, quais delas são isostáticas?

2.1 - Exercícios:

Calcule as reações de apoio das vigas a seguir e elabore os Diagramas de Normal, Cortante e Momento Fletor de cada uma delas:

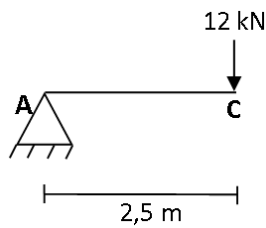


1º Passo – Cálculo dos Esforços Externos

2º Passo – Cálculo dos Esforços Internos

Ponto A



Ponto CPonto B3º Passo - Elaboração dos Diagramas

Para a elaboração dos diagramas você deverá usar os resultados obtidos no cálculo dos esforços internos, cada um em seu respectivo diagrama e respeitando o sinal.

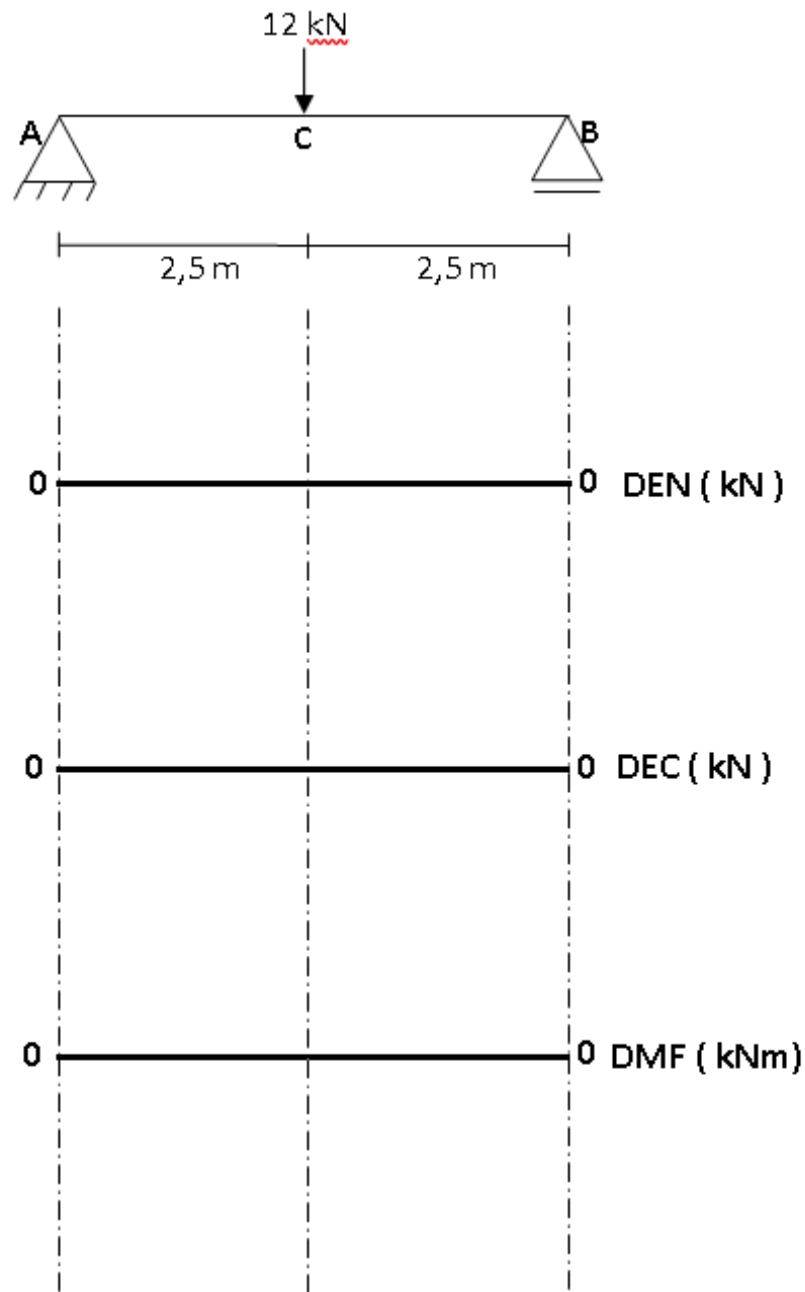
No **DEN** (Diagrama de Esforço Normal) o sinal **POSITIVO** fica **ACIMA** da linha de valor **ZERO**, e o **NEGATIVO** fica **ABAIXO** da linha de valor **ZERO**.

No **DEC** (Diagrama de Esforço Cortante) o sinal **POSITIVO** fica **ACIMA** da linha de valor **ZERO**, e o **NEGATIVO** fica **ABAIXO** da linha de valor **ZERO**.

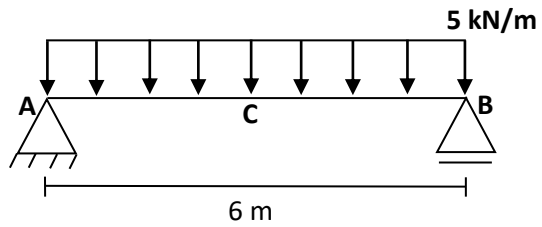
No **DMF** (Diagrama de Momento Fletor) é o inverso!!!! O sinal **NEGATIVO** fica **ACIMA** da linha de valor **ZERO**, enquanto o valor **POSITIVO** fica **ABAIXO** da linha de valor **ZERO**.

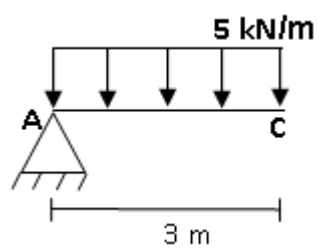
Ainda no DMF, ao ligar os pontos, você deverá seguir a seguinte observação. Caso o trecho entre os pontos não apresente cargas, ou seja, for um intervalo de **CARGAS PONTUAIS**, então a linha será um **RETA** (equação de 1º grau). Se o intervalo apresentar cargas, ou seja, for um intervalo com **CARGAS DISTRIBUÍDAS**, então a linha será uma **PARÁBOLA** (Equação de 2º grau).

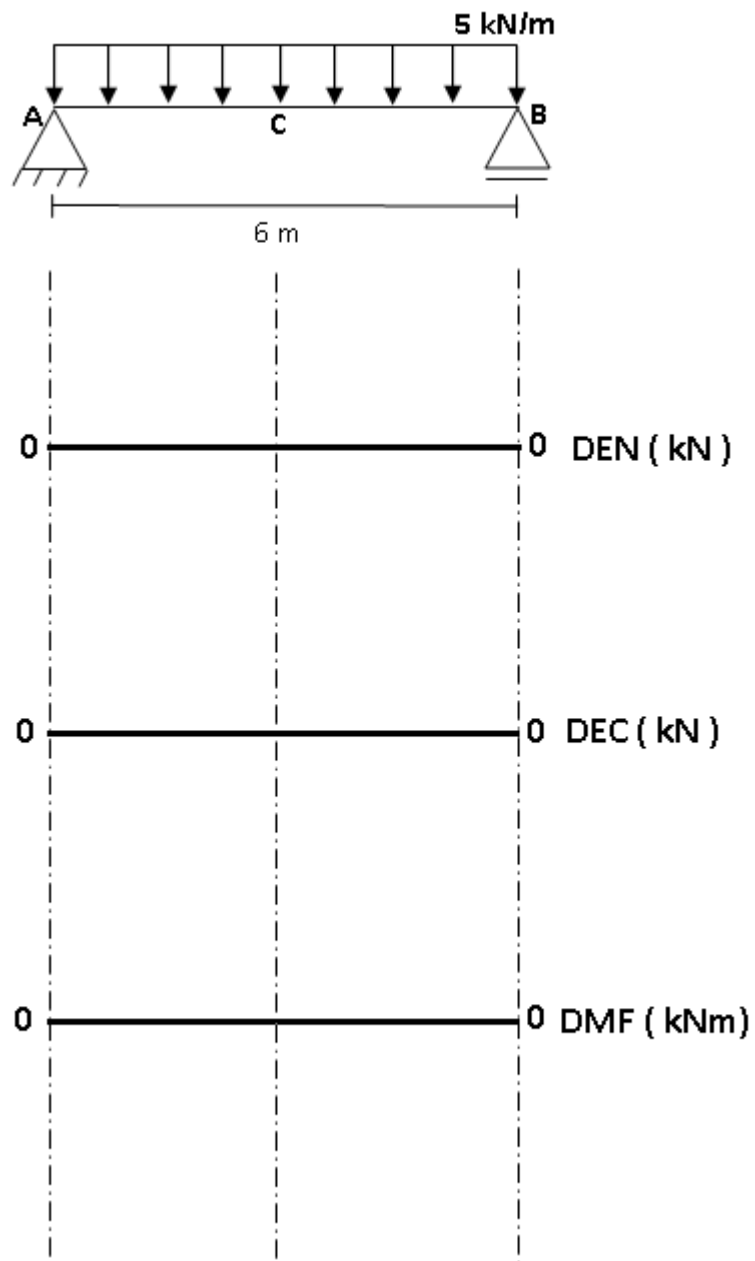
Então agora vamos montar os diagramas:



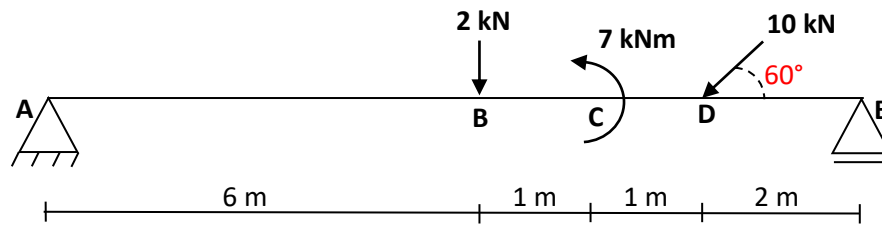
2)

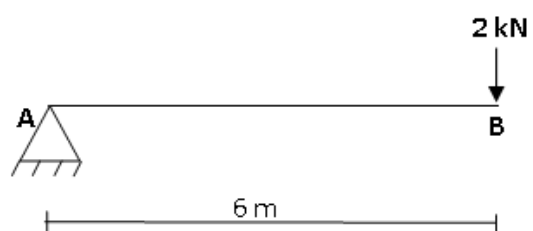
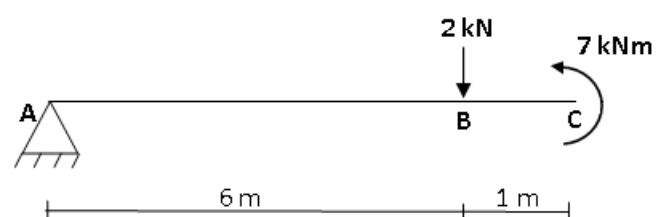
1º Passo – Cálculo dos Esforços Externos2º Passo – Cálculo dos Esforços InternosPonto A

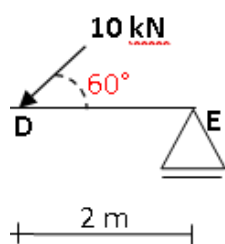
Ponto CPonto B

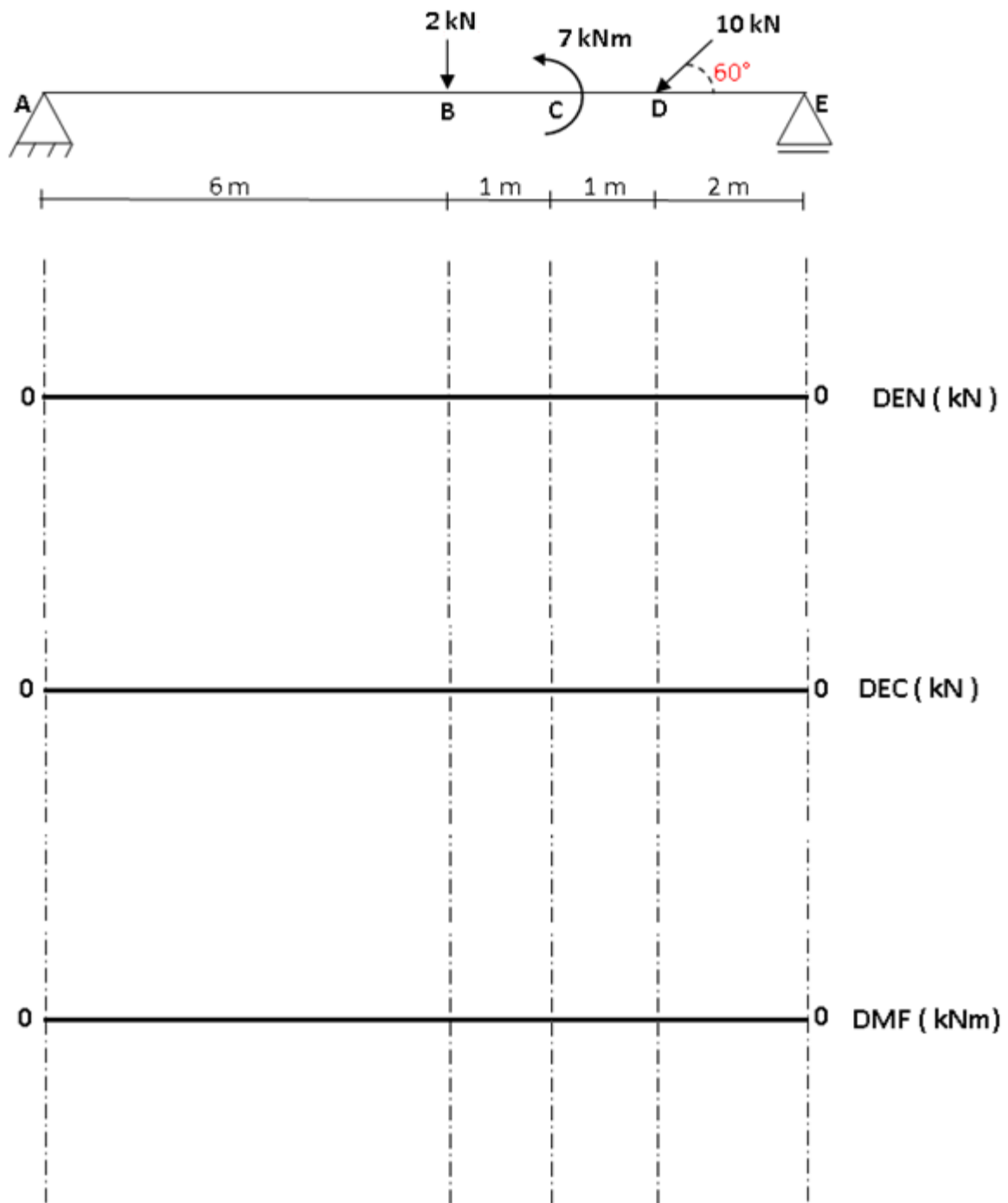
3º Passo - Elaboração dos Diagramas

3)

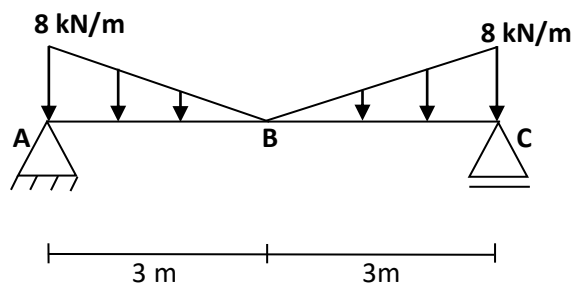
1º Passo – Cálculo dos Esforços Externos2º Passo – Cálculo dos Esforços InternosPonto A

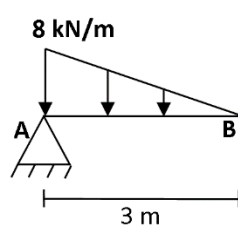
Ponto BPonto C

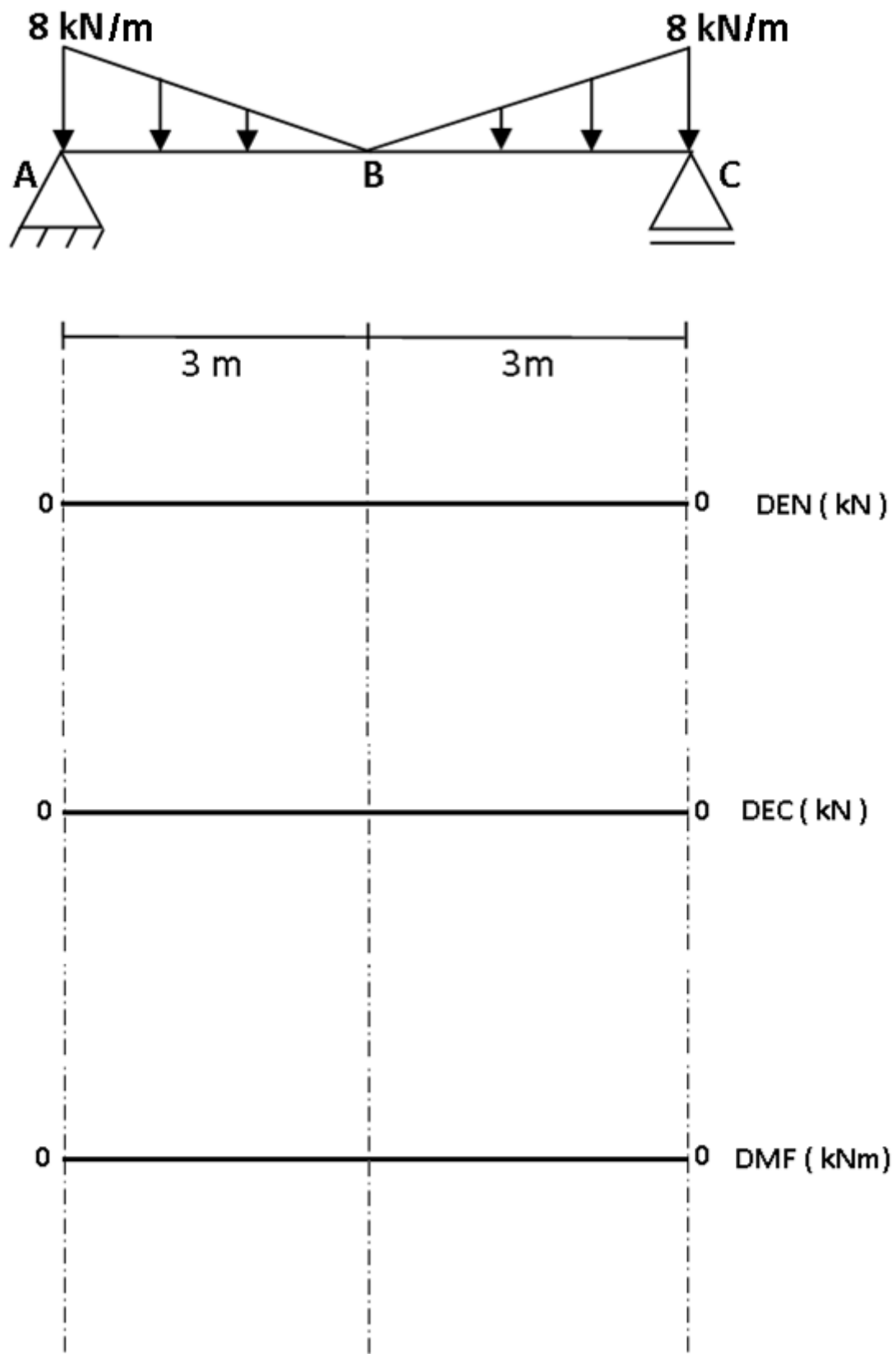
Ponto DPonto E

3º Passo - Elaboração dos Diagramas

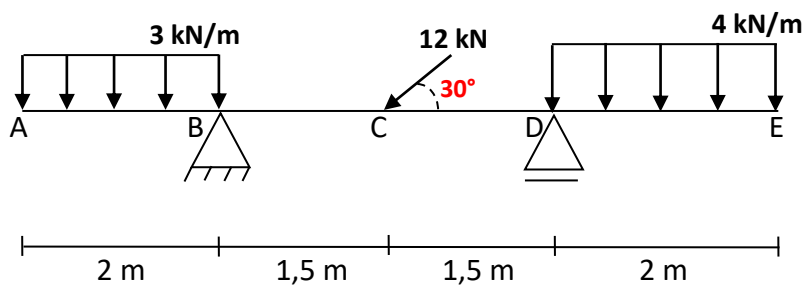
4)

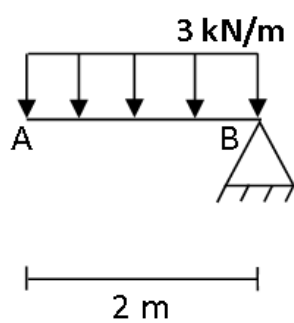
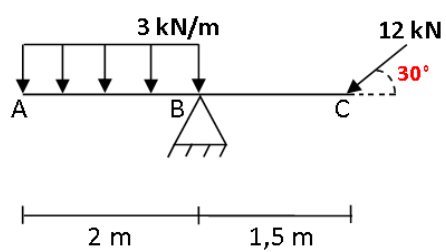
1º Passo – Cálculo dos Esforços Externos2º Passo – Cálculo dos Esforços InternosPonto A

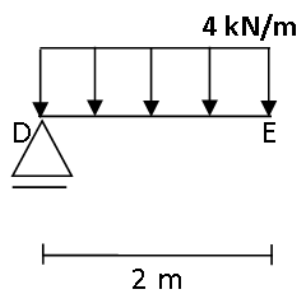
Ponto BPonto C

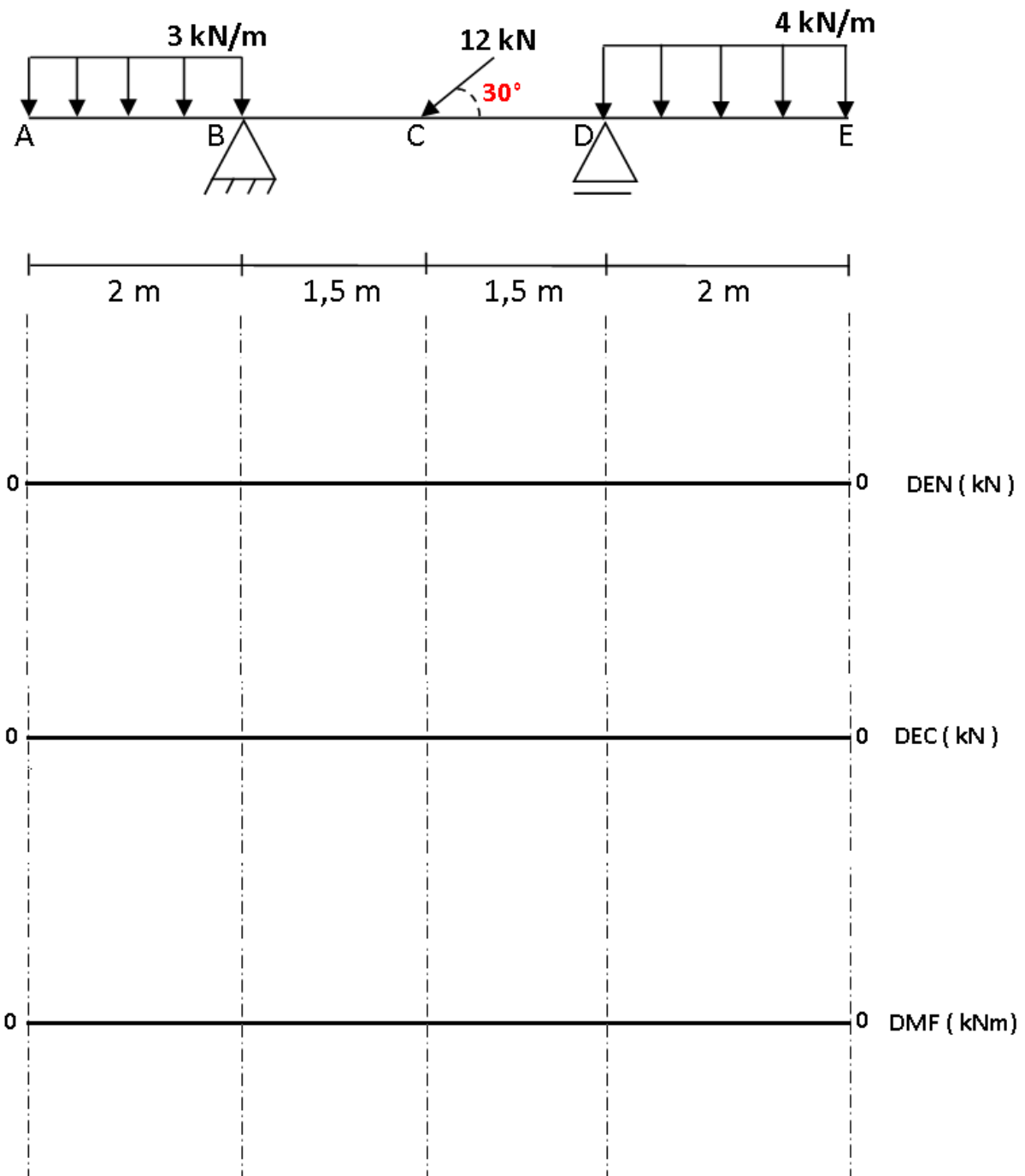
3º Passo - Elaboração dos Diagramas

5)

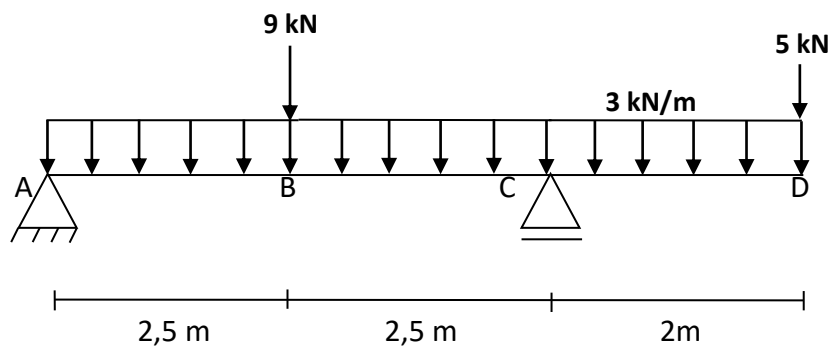
1º Passo – Cálculo dos Esforços Externos2º Passo – Cálculo dos Esforços InternosPonto A $\vec{A}$

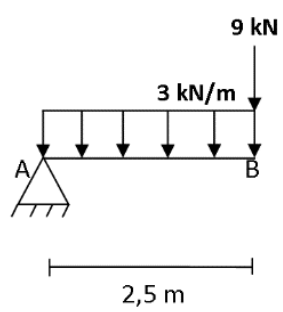
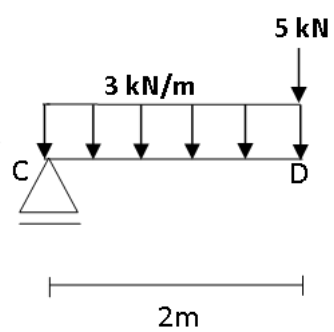
Ponto BPonto C

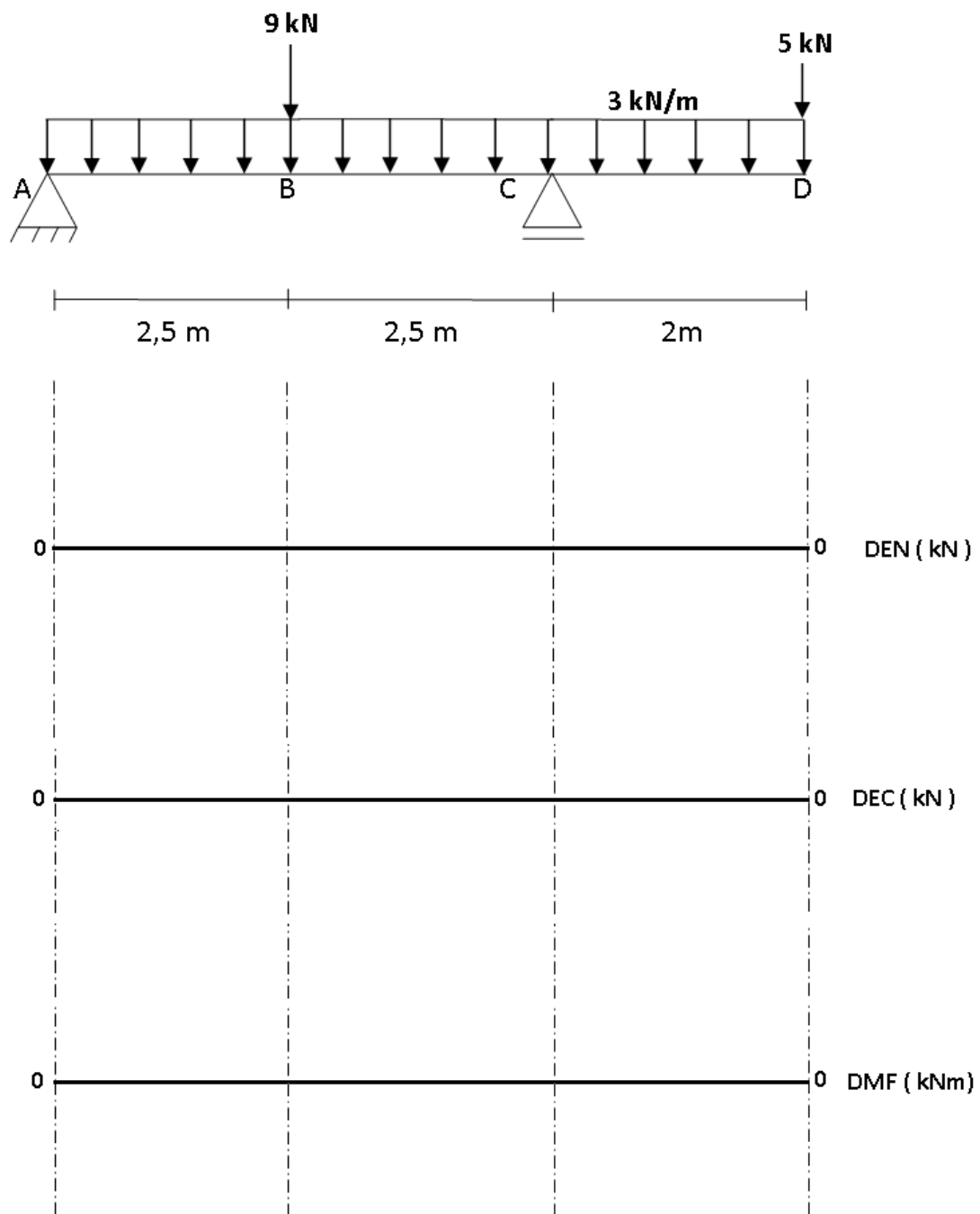
Ponto DPonto E $\bar{E}$

3º Passo - Elaboração dos Diagramas

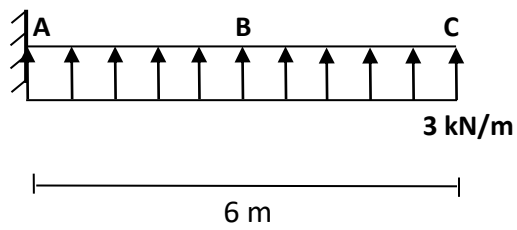
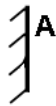
6)

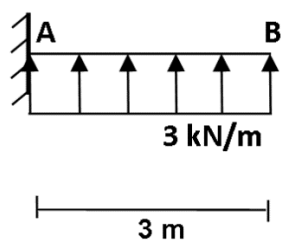
1º Passo – Cálculo dos Esforços Externos2º Passo – Cálculo dos Esforços InternosPonto A

Ponto BPonto C

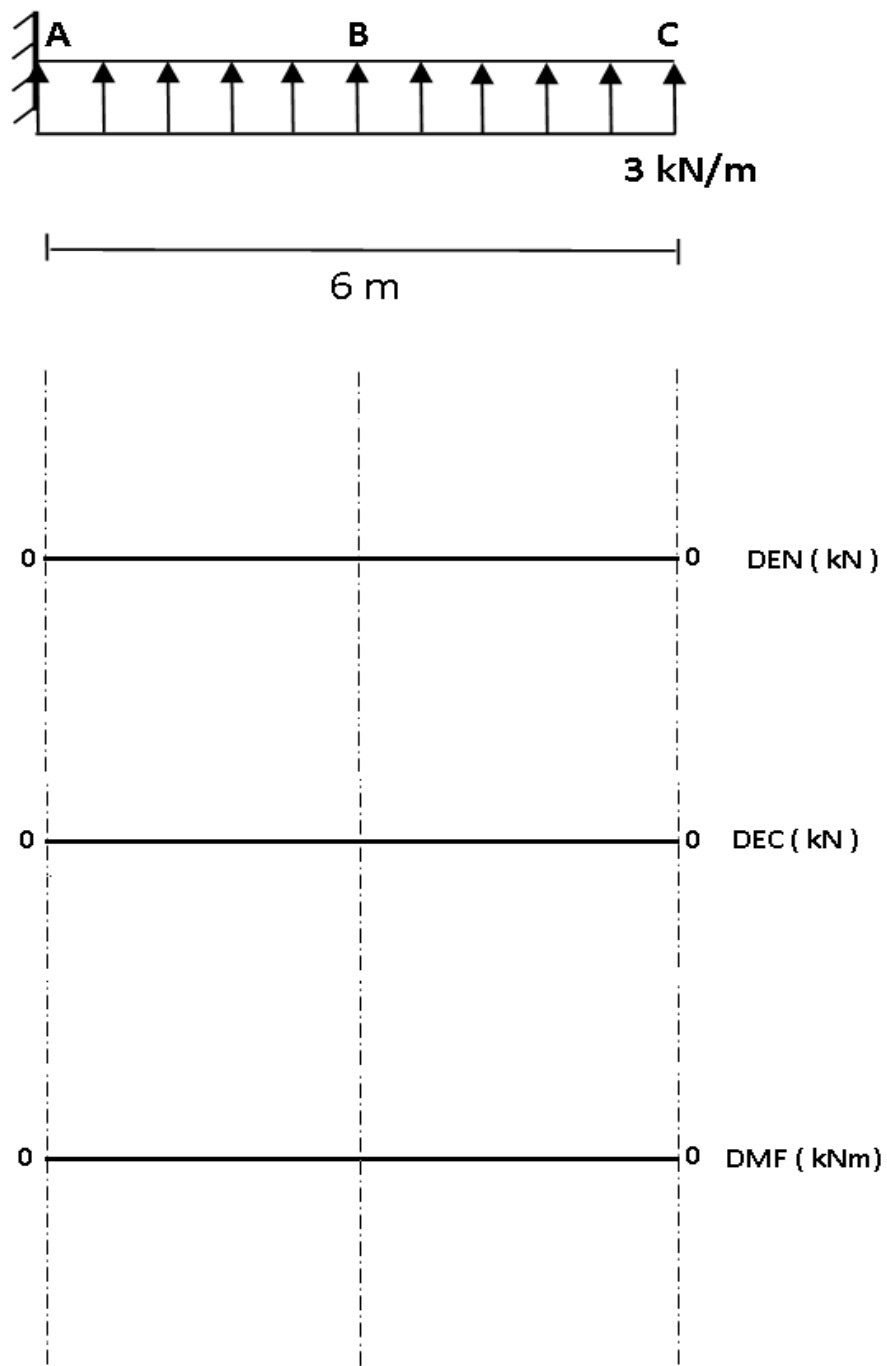
Ponto D3º Passo - Elaboração dos Diagramas

7)

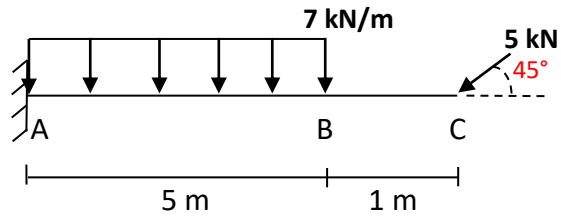
1º Passo – Cálculo dos Esforços Externos2º Passo – Cálculo dos Esforços InternosPonto A

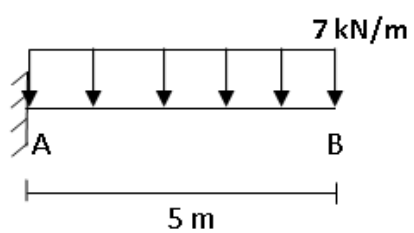
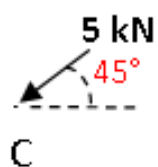
Ponto BPonto C

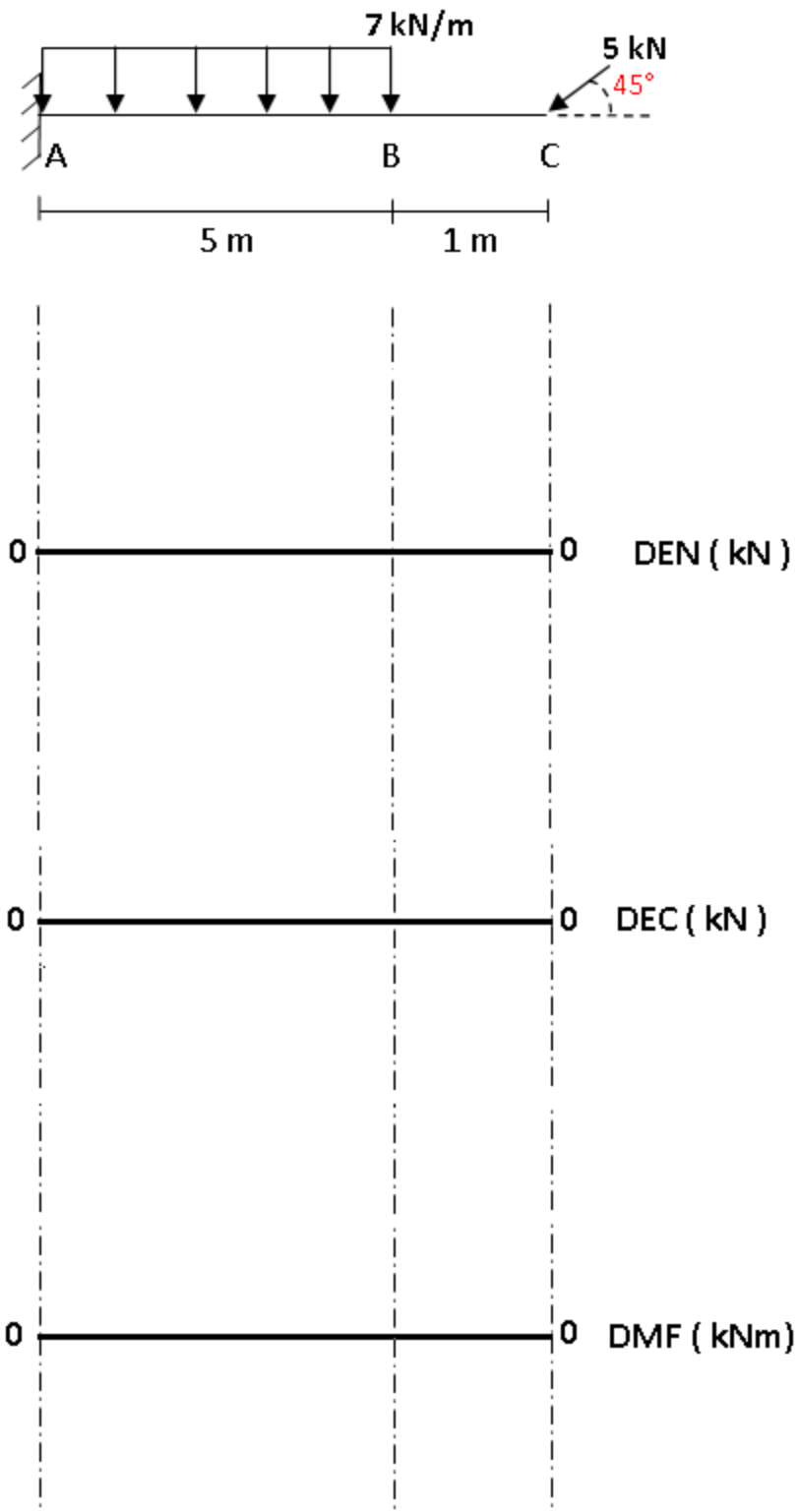
C
-

3º Passo - Elaboração dos Diagramas

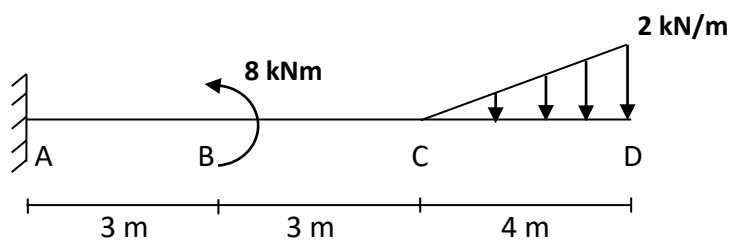
8)

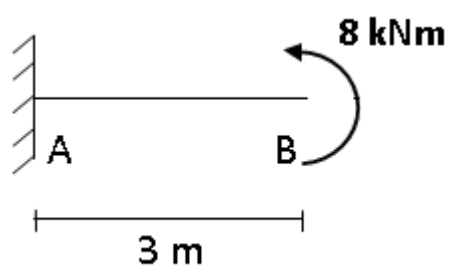
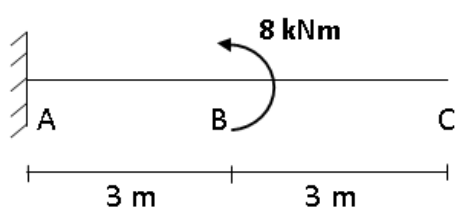
1º Passo – Cálculo dos Esforços Externos2º Passo – Cálculo dos Esforços InternosPonto A

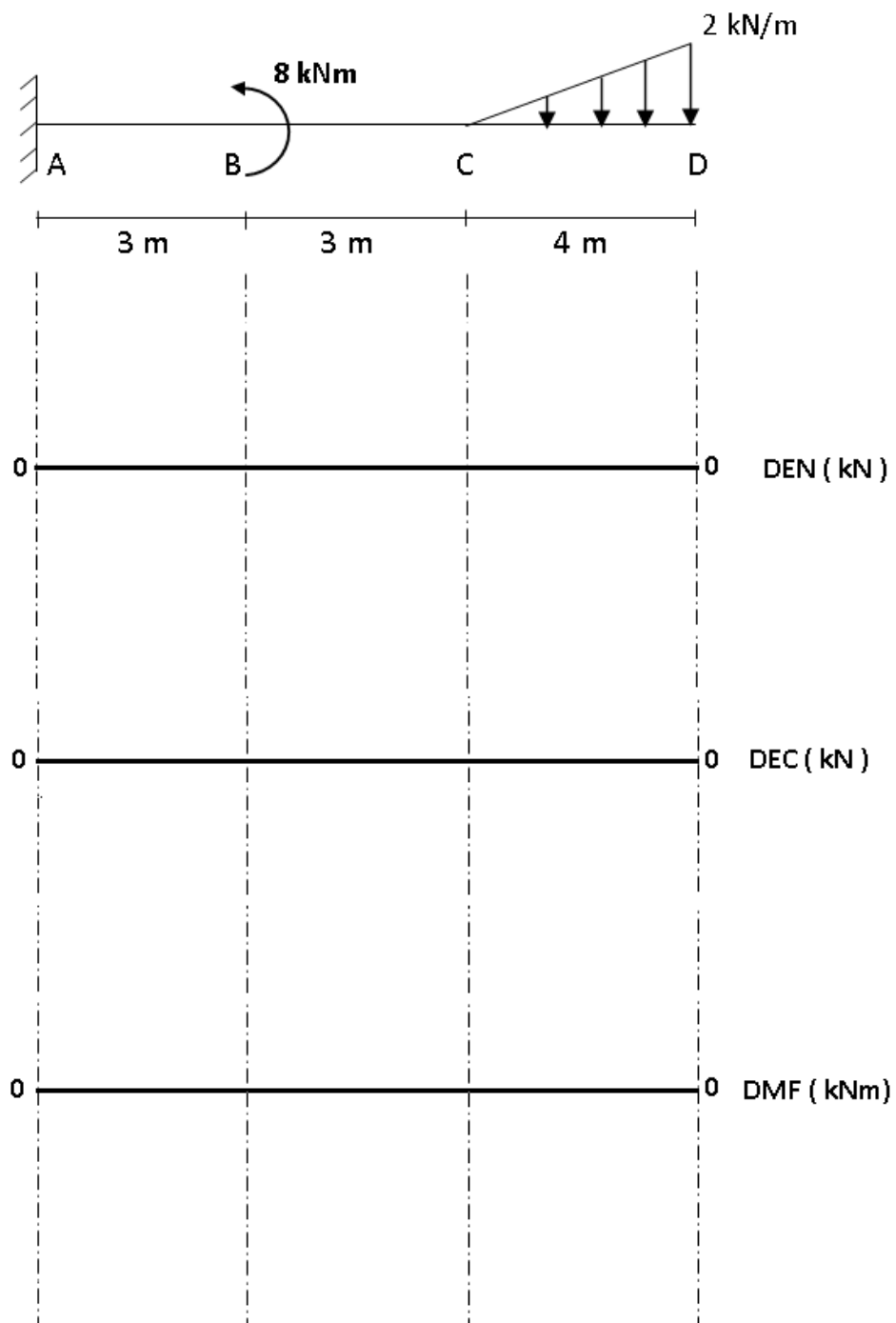
Ponto BPonto C

3º Passo - Elaboração dos Diagramas

9)

1º Passo – Cálculo dos Esforços Externos2º Passo – Cálculo dos Esforços InternosPonto A

Ponto BPonto C

Ponto D $\dot{D}$ 3º Passo - Elaboração dos Diagramas

Curso Análise de Estruturas Isostáticas

CANAL O CALCULISTA



➤ **Módulo III**
Pórticos

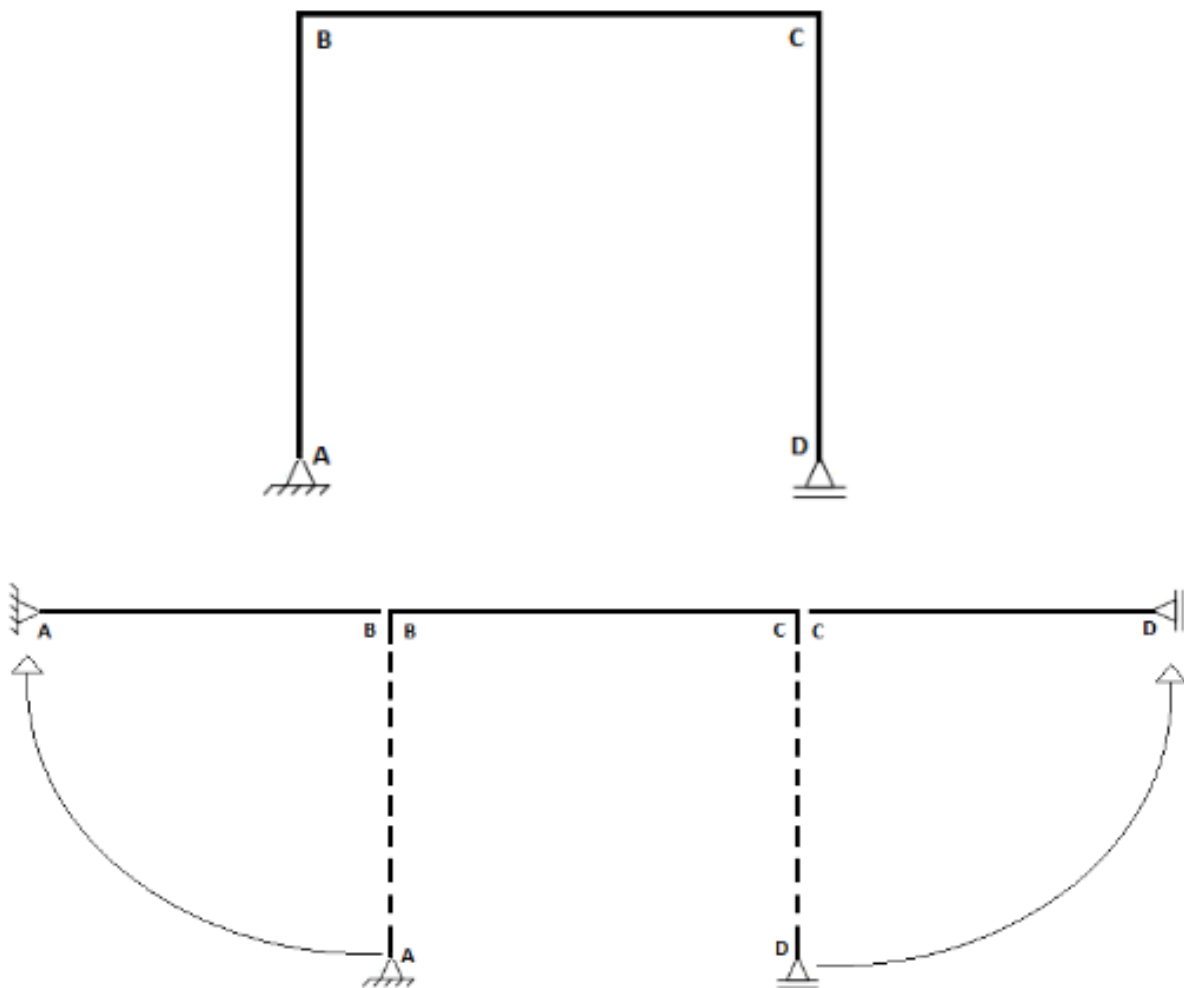
Módulo III – Pórticos

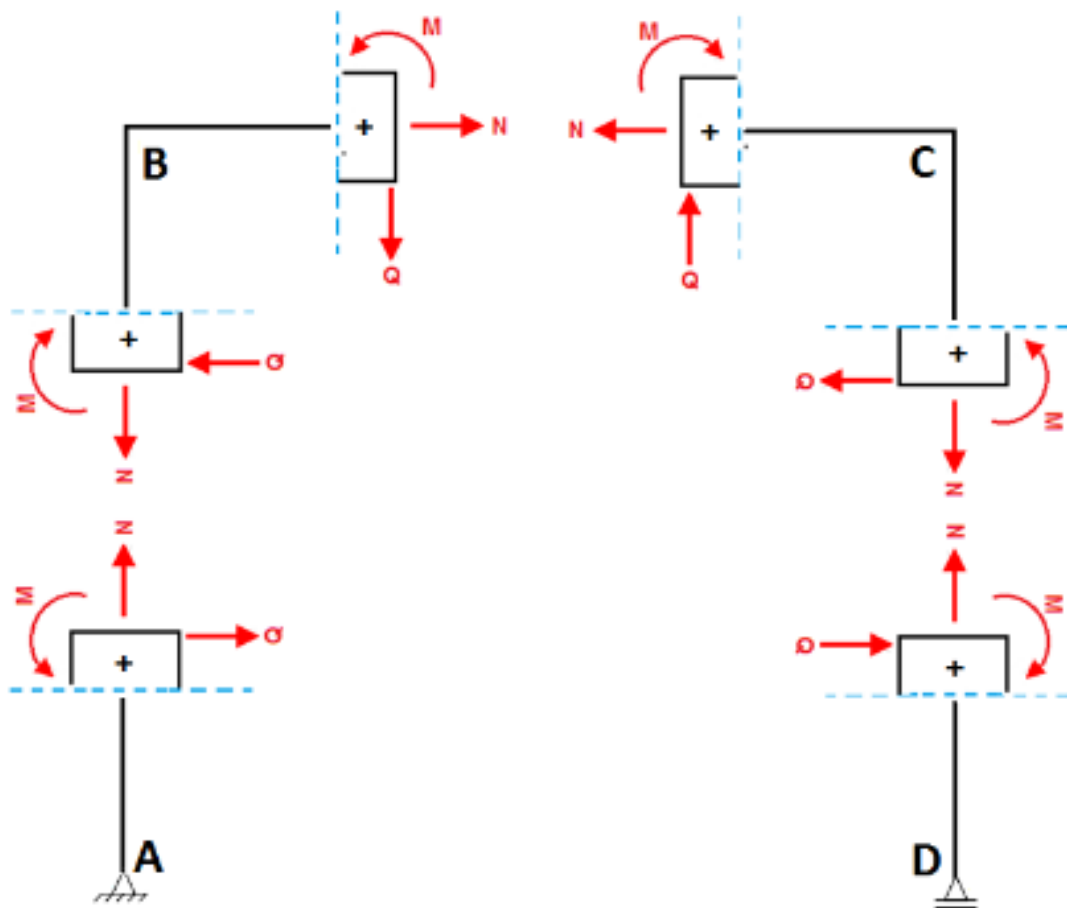
3. Pórticos

Neste módulo falaremos sobre os Pórticos, que são modelos estruturais planos de uma estrutura tridimensional, formado por elementos lineares, conectados de forma a resistir esforços normais, cortantes e aos esforços de flexão.

O cálculo dos Esforços Externos é igual das vigas, tendo atenção ao braço de alavanca da força em relação ao ponto em análise.

Já no cálculo dos Esforços Internos, devemos considerar as colunas como vigas e a convenção dos sinais positivos da seguinte forma:





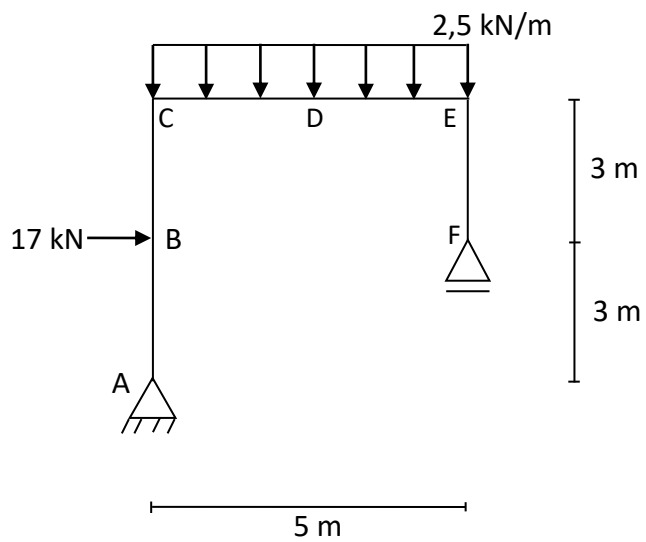
Importante observar que nas COLUNAS DOS PÓRTICOS, valores de NORMAL agora estão no eixo Y, e os valores das cortantes estão no eixo X.

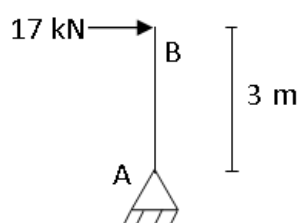
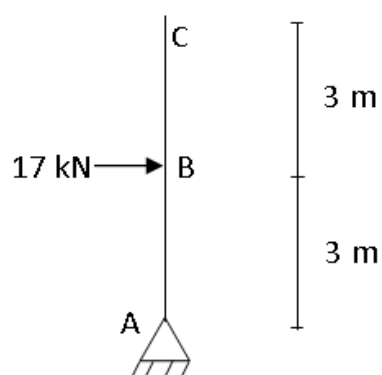
A melhor forma de aprendermos isso é praticando.

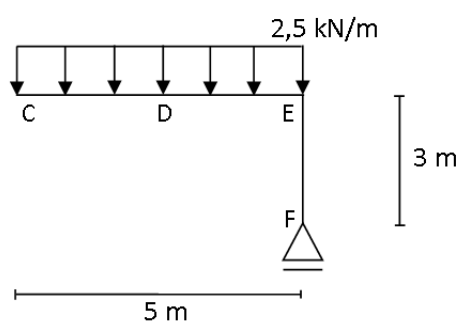
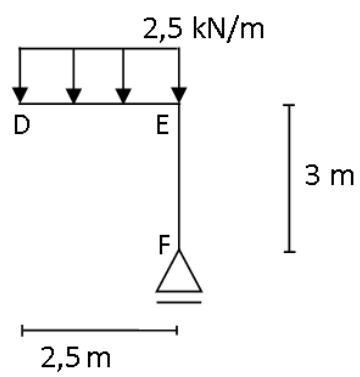
Então vamos aos exercícios:

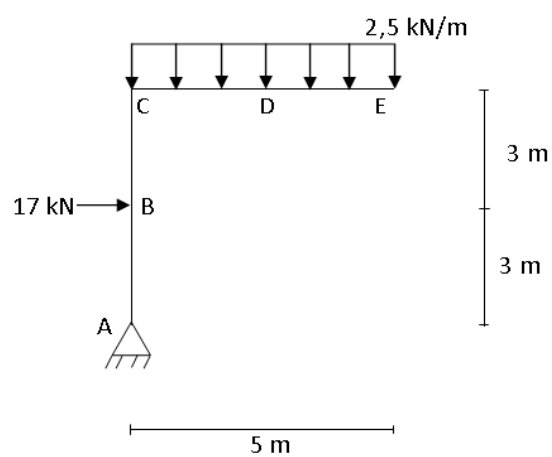
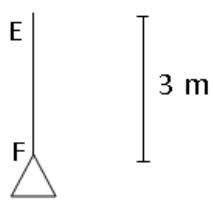
Anote aqui as suas dúvidas:

1)

1º Passo – Cálculo dos Esforços Externos2º Passo – Cálculo dos Esforços InternosPonto A

Ponto BPonto C – Coluna

Ponto C - VigaPonto D

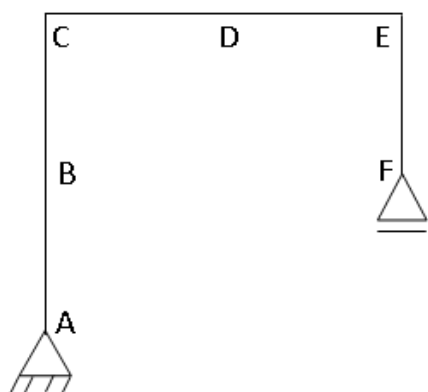
Ponto E - VigaPonto E - Coluna

Ponto F

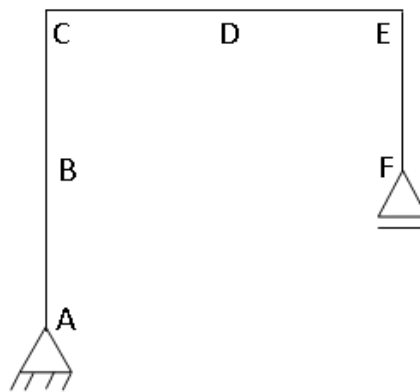


3º Passo - Elaboração dos Diagramas

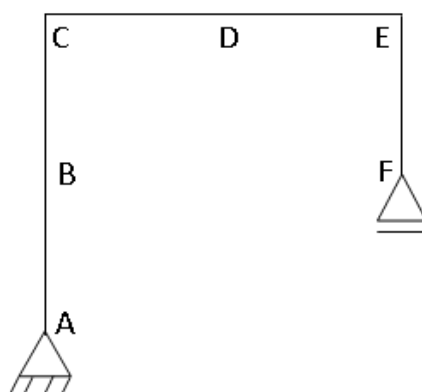
DEN (kN)



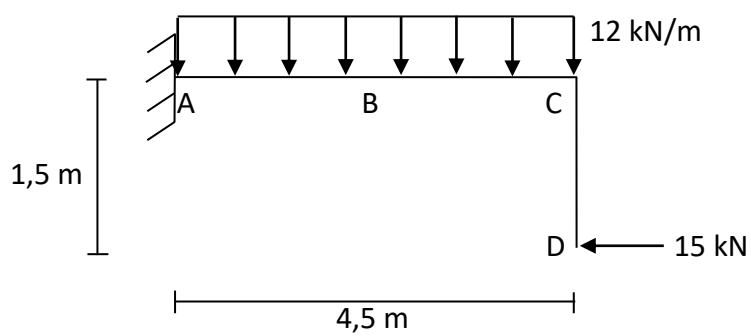
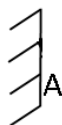
DEC (kN)

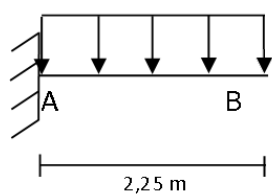
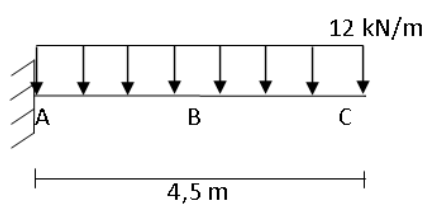
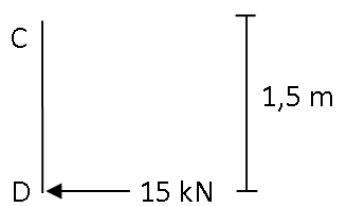


DMF (kNm)



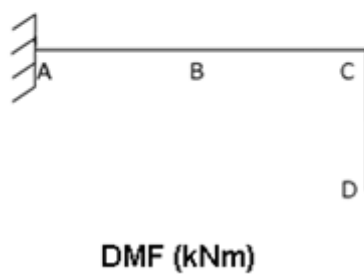
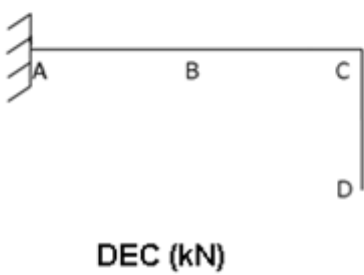
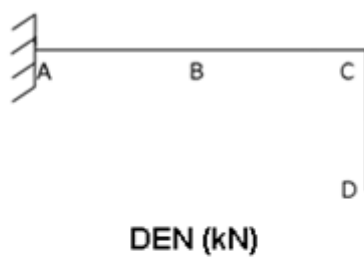
2)

1º Passo – Cálculo dos Esforços Externos2º Passo – Cálculo dos Esforços InternosPonto A

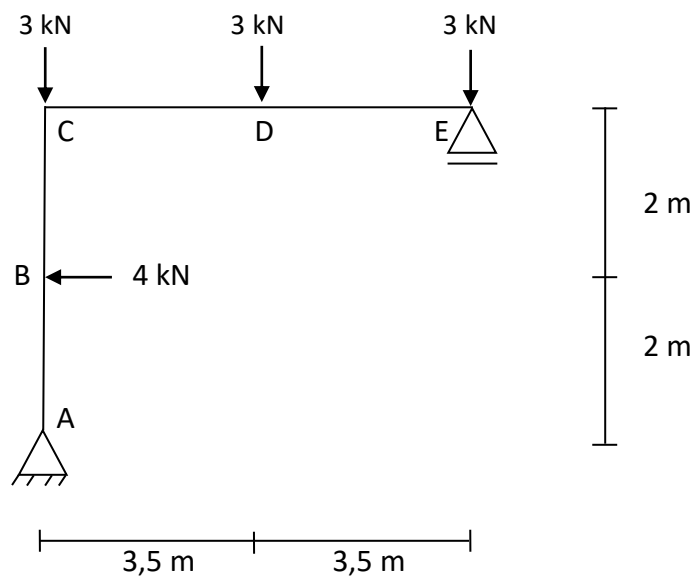
Ponto BPonto C (Viga)Ponto C (Coluna)

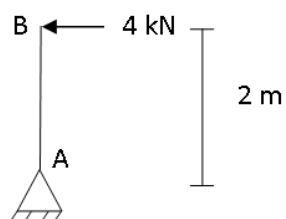
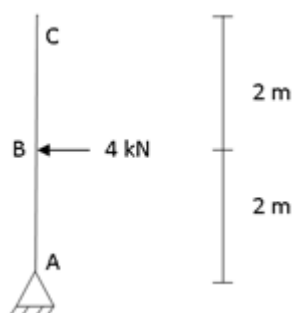
Ponto D

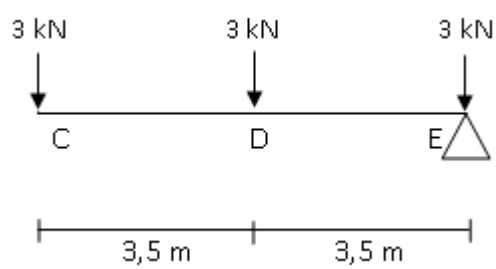
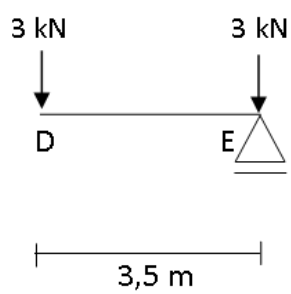
D ← 15 kN

3º Passo - Elaboração dos Diagramas

3)

1º Passo – Cálculo dos Esforços Externos2º Passo – Cálculo dos Esforços InternosPonto A

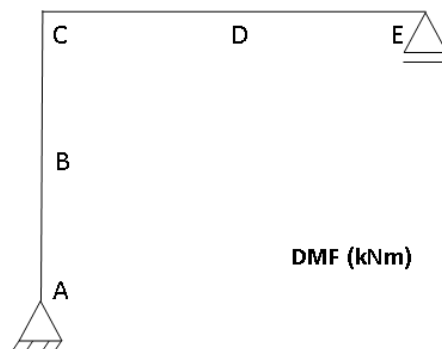
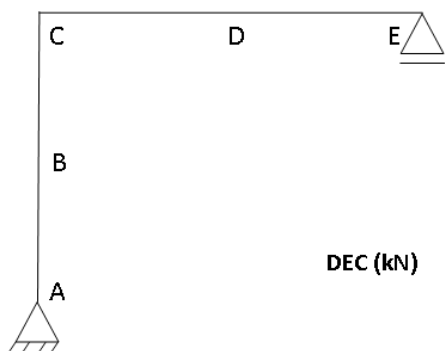
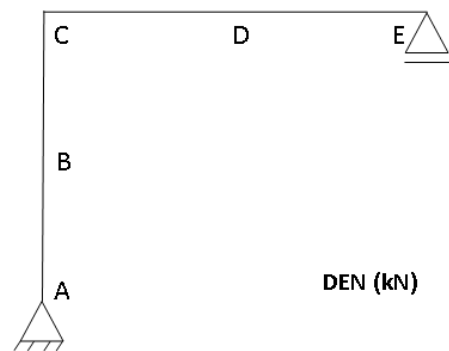
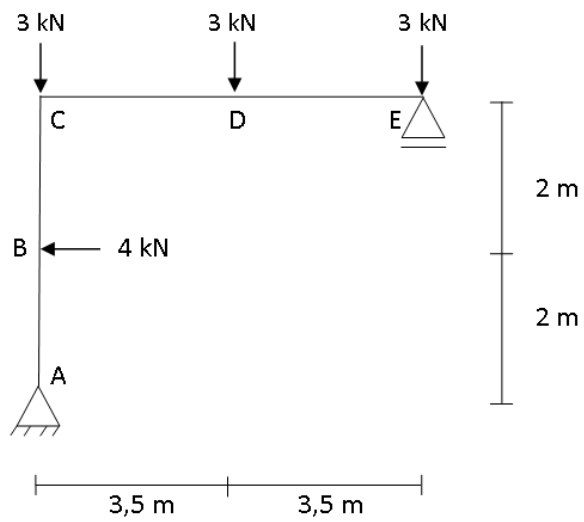
Ponto BPonto C (Coluna)

Ponto C (Viga)Ponto D

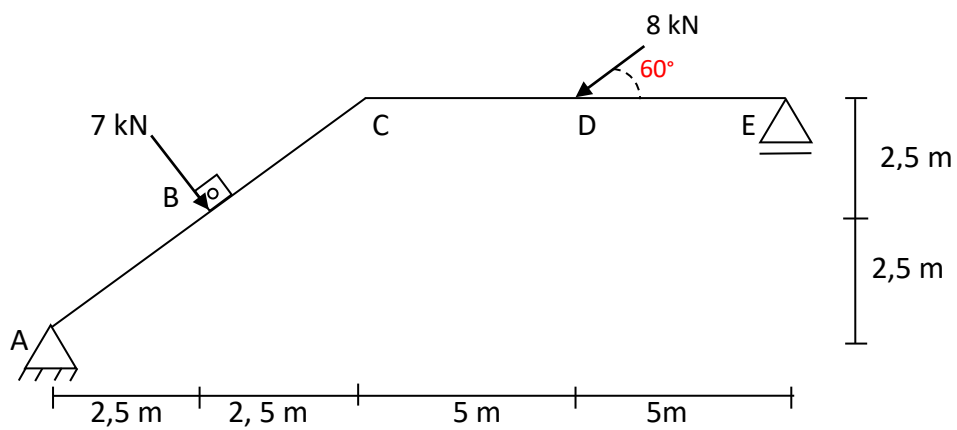
Ponto E

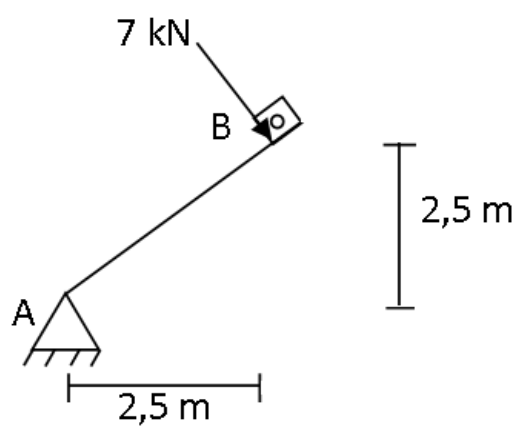


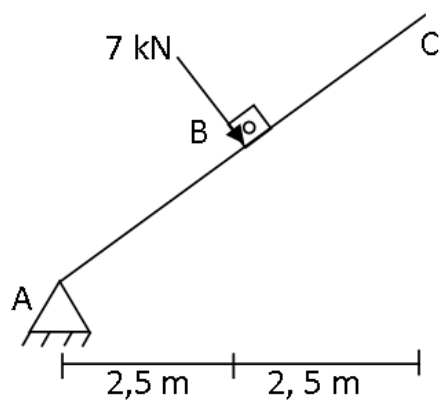
3º Passo - Elaboração dos Diagramas

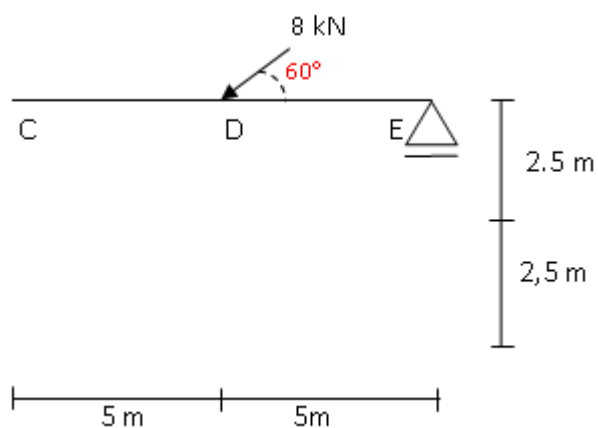
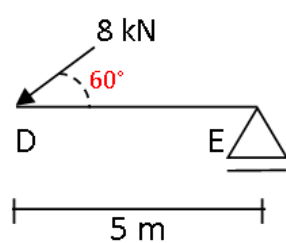


4)

1º Passo – Cálculo dos Esforços Externos2º Passo – Cálculo dos Esforços InternosPonto A

Ponto B

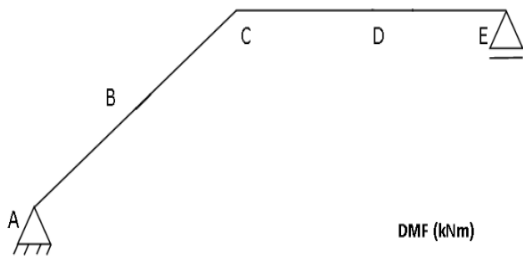
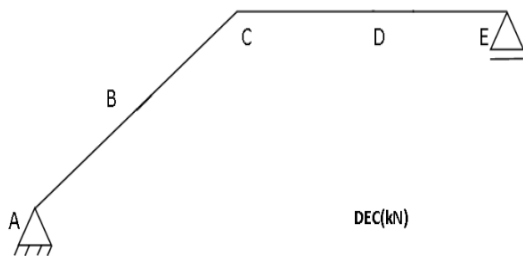
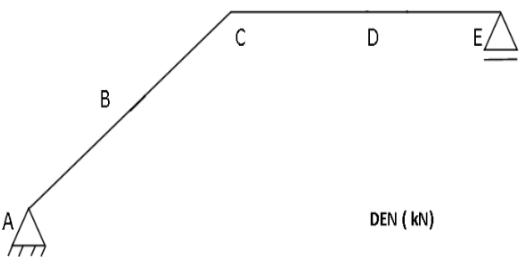
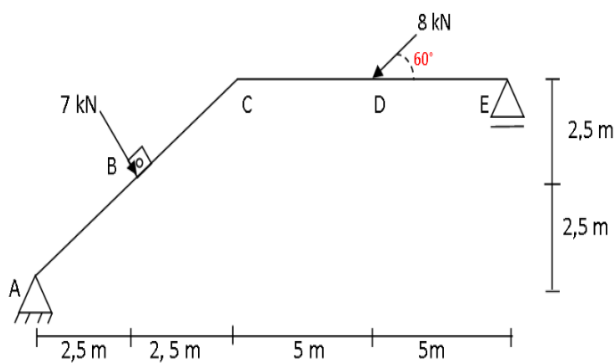
Ponto C (Coluna)

Ponto C (Viga)Ponto D

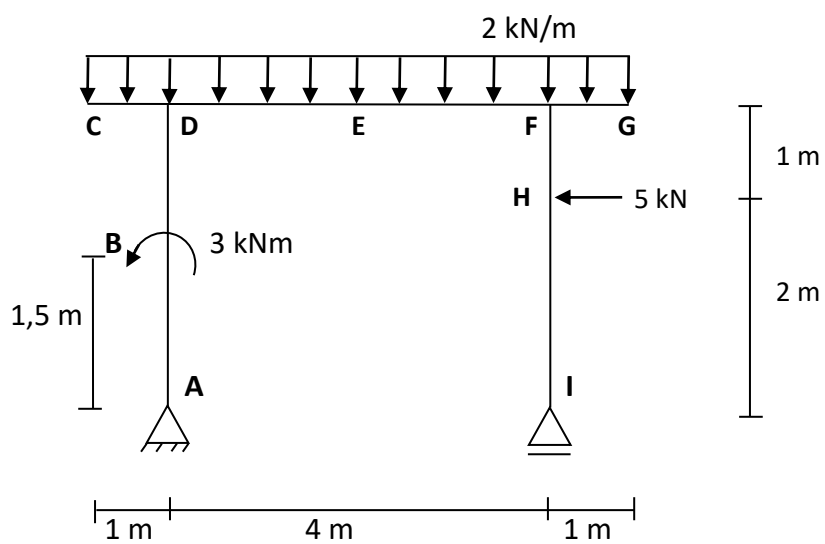
Ponto E

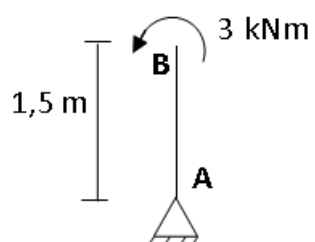


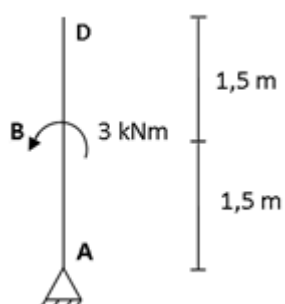
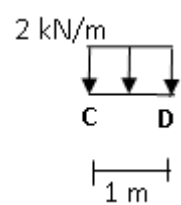
3º Passo - Elaboração dos Diagramas

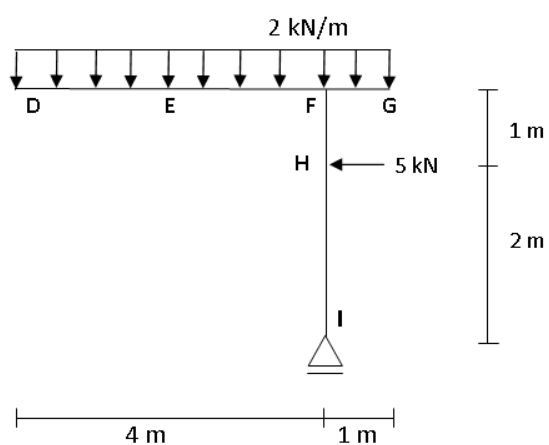
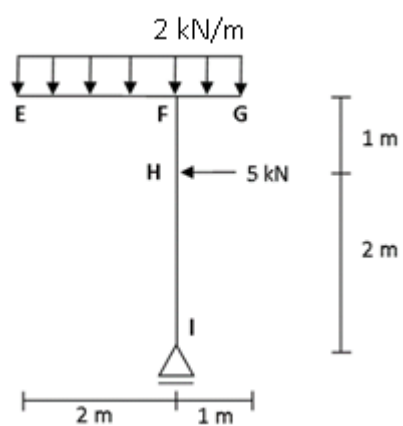


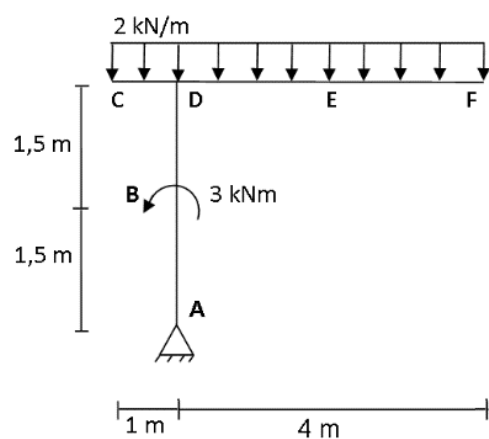
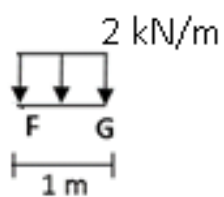
5)

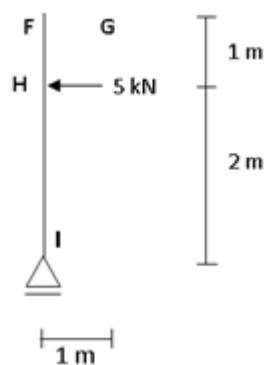
1º Passo – Cálculo dos Esforços Externos2º Passo – Cálculo dos Esforços InternosPonto A

Ponto BPonto C $\bar{c}$

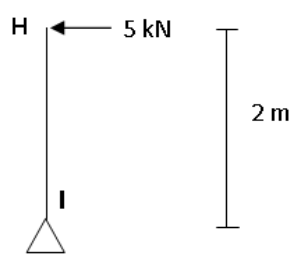
Ponto D - ColunaPonto D – Viga menor

Ponto D – Viga MaiorPonto E

Ponto F – Viga MaiorPonto F – Viga Maior

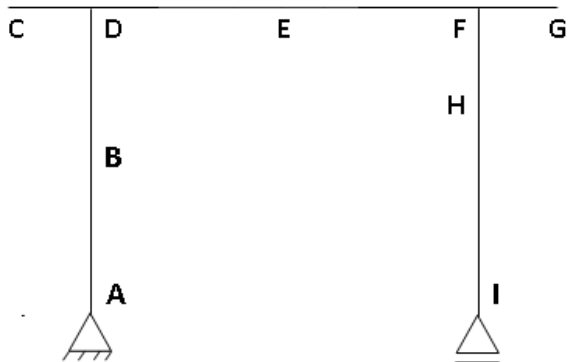
Ponto F – ColunaPonto G

G

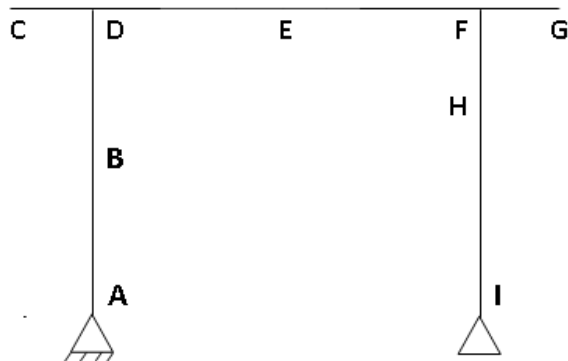
Ponto HPonto I

3º Passo - Elaboração dos Diagramas

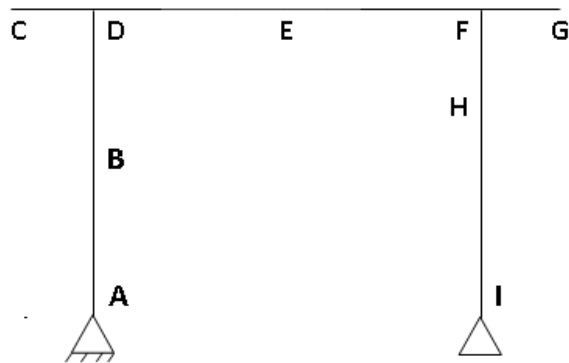
DEN (kN)



DEC (kN)



DMF (kNm)



Curso Análise de Estruturas Isostáticas

CANAL O CALCULISTA



➤ **Módulo IV**
Vigas Gerber

Módulo IV – Vigas Gerber

4. Vigas Gerber

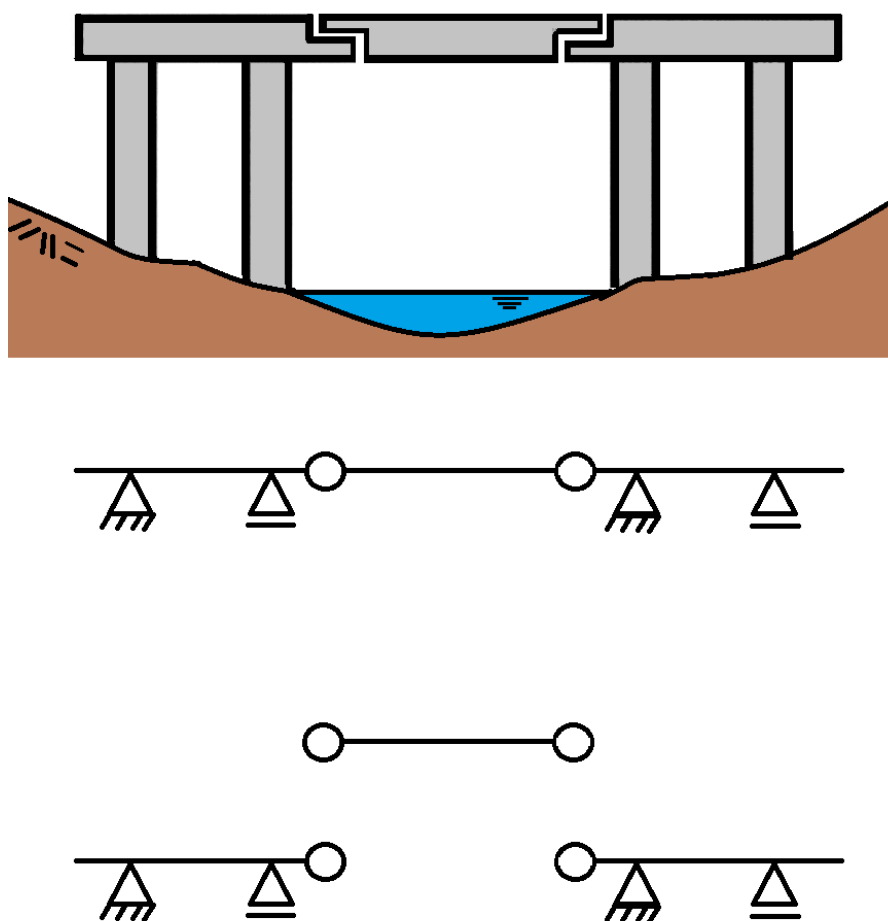
Uma Viga Gerber é composta por vigas hipostáticas e isostáticas que se apoiam entre si através de articulações fixas ou móveis, formando trechos estaticamente determinados, ou seja, possibilitando assim a determinação dos esforços normal, cortante, e momento fletor apenas pelos princípios da estática.

Essas articulações fixas ou móveis são denominadas Dentes Gerber ou Rótulas, no qual apresentam o valor de **Momento Fletor nulo**.

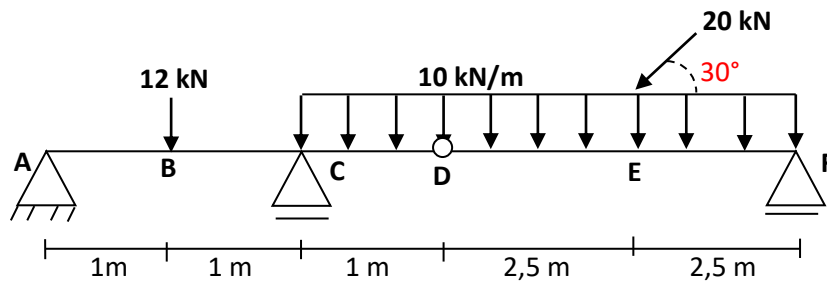
Uma Viga Gerber é dividida em trecho CEP (Com Estabilidade Própria) e trechos SEP (Sem Estabilidade Própria). O cálculo para a determinação dos esforços externos deve ser iniciado pelo(s) trecho(s) SEP e posteriormente o(s) trecho(s) CEP.

As vigas Gerber são muito utilizadas em estruturas como pontes e estruturas pré-moldadas, onde fica fácil a observação dos elementos de ligação.

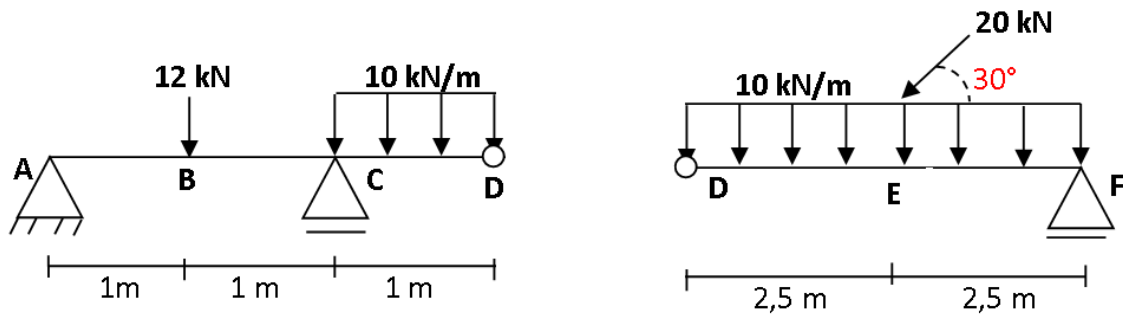
Exemplo de Viga Gerber:



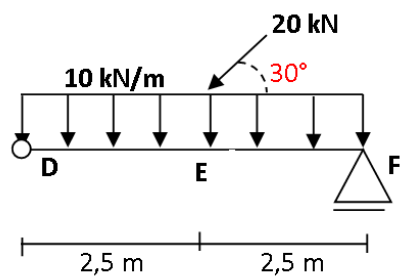
1)

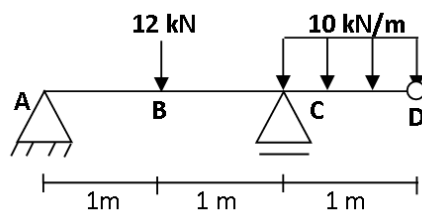
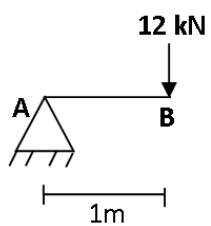


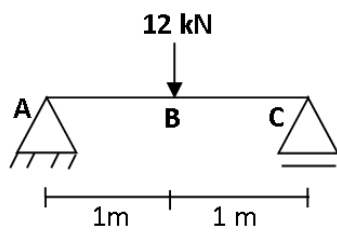
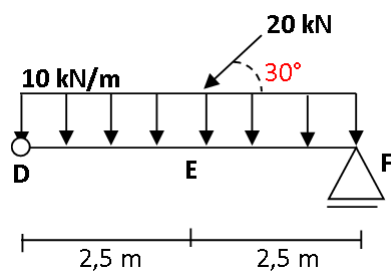
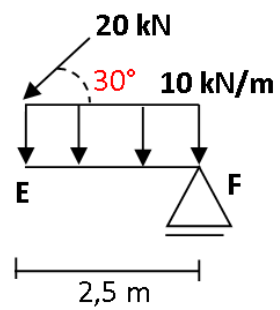
1º Passo - Análise das seções CEP (Com Estabilidade Própria) e SEP (Sem Estabilidade Própria)

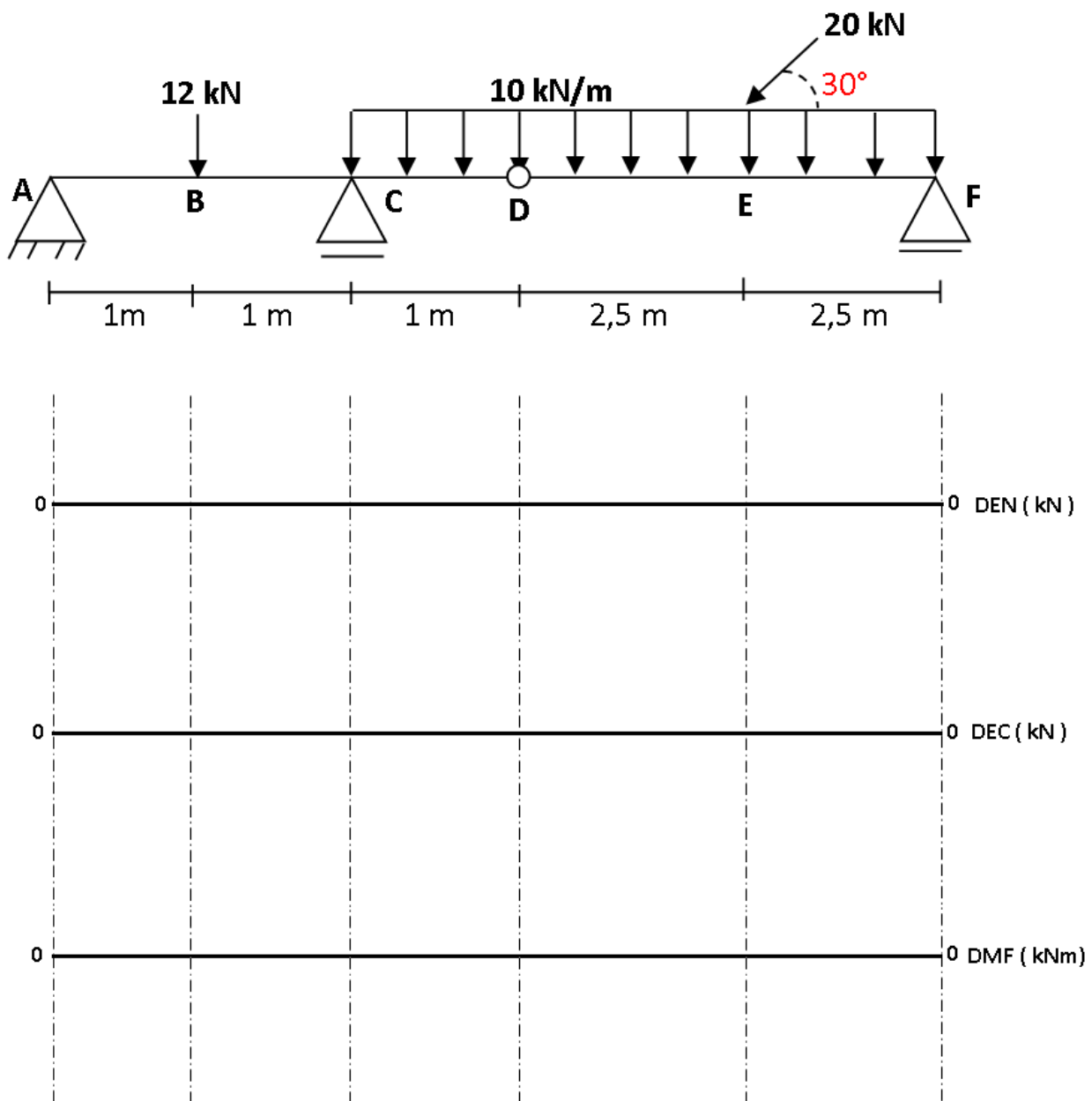


2º Passo – Cálculo dos Esforços Externos das Estruturas SEP

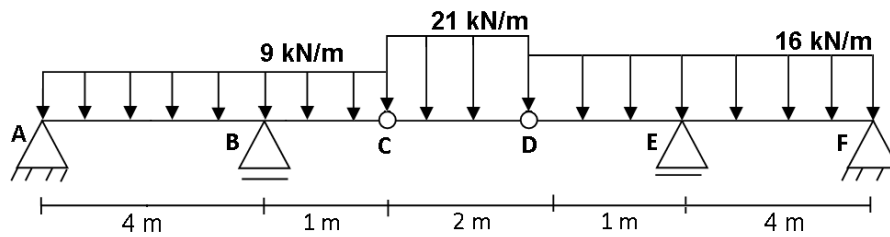


3º Passo – Cálculo dos Esforços Externos das Estruturas CEP4º Passo – Cálculo dos Esforços InternosPonto APonto B

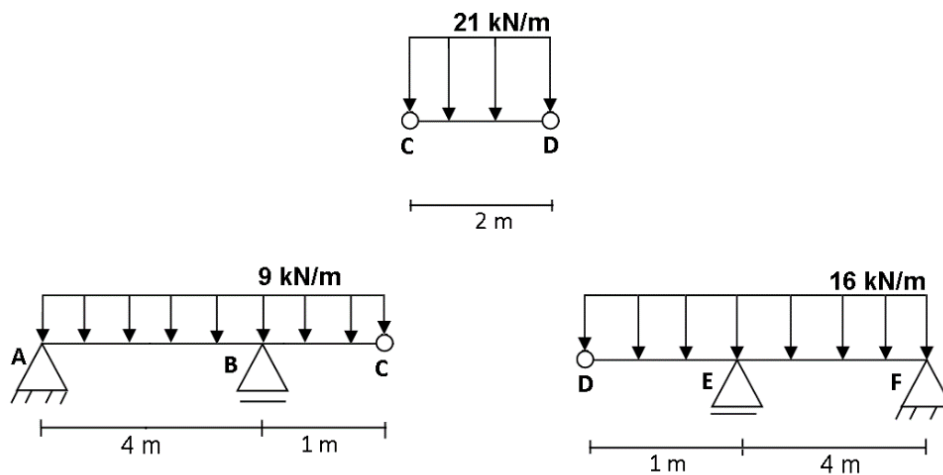
Ponto CPonto DPonto E

Ponto F5º Passo - Elaboração dos Diagramas

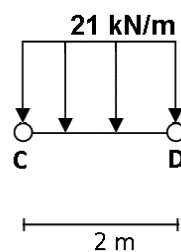
2)

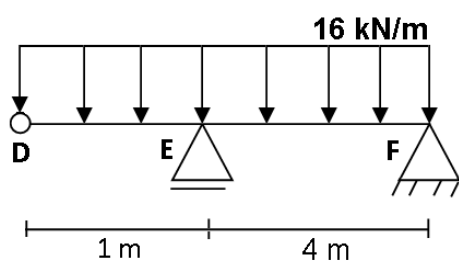
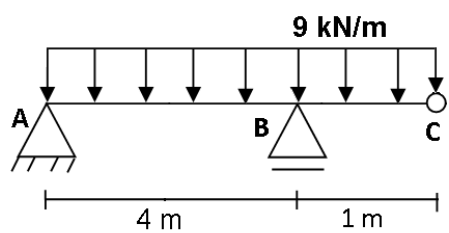


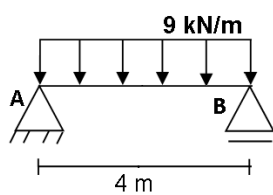
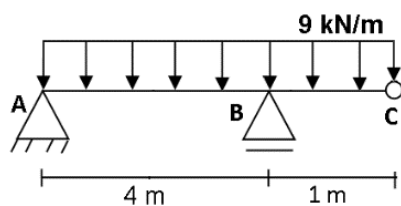
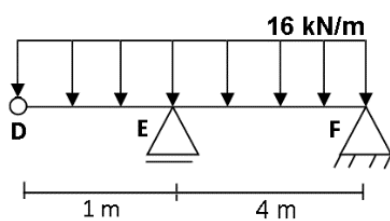
1º Passo - Análise das seções CEP (Com Estabilidade Própria) e SEP (Sem Estabilidade Própria)



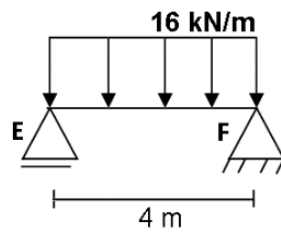
2º Passo – Cálculo dos Esforços Externos das Estruturas SEP



3º Passo – Cálculo dos Esforços Externos das Estruturas CEP

4º Passo – Cálculo dos Esforços InternosPonto APonto BPonto CPonto D

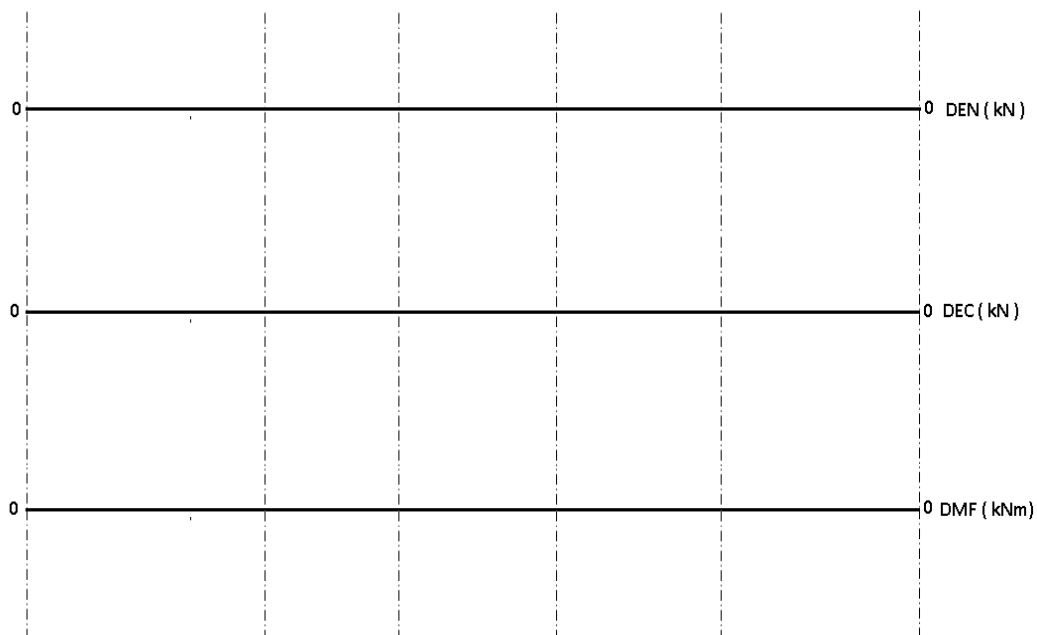
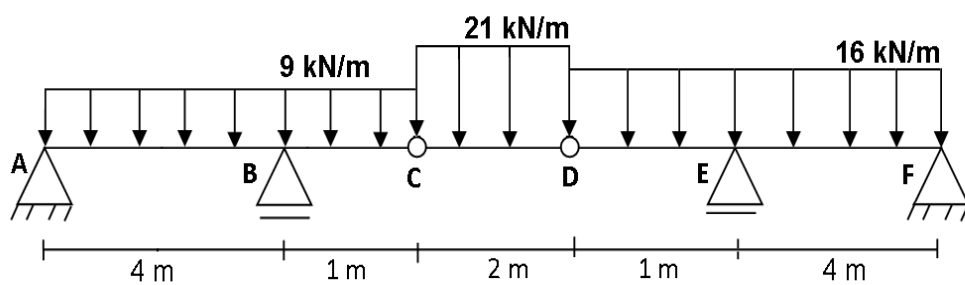
Ponto E



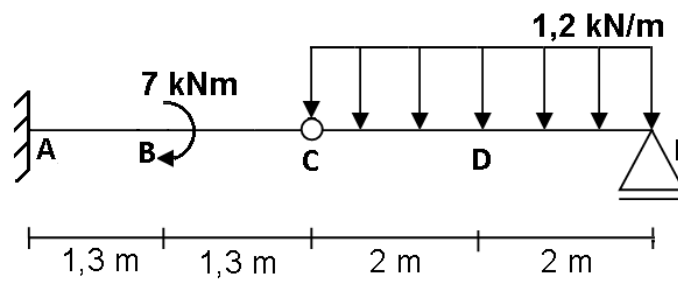
Ponto F



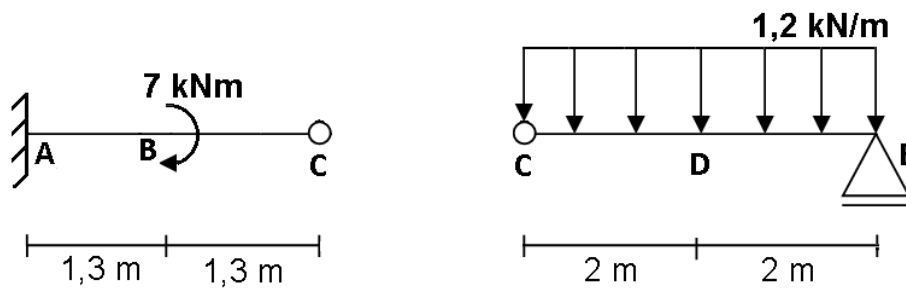
5º Passo – Elaboração dos Diagramas



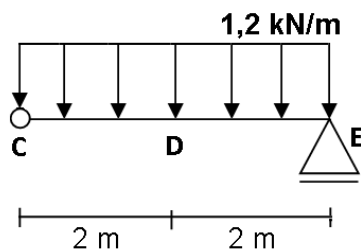
3)

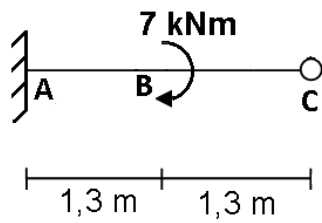
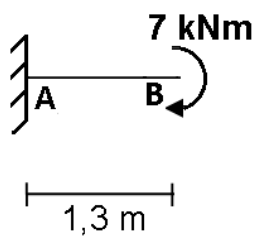


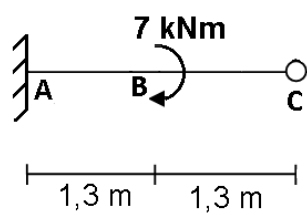
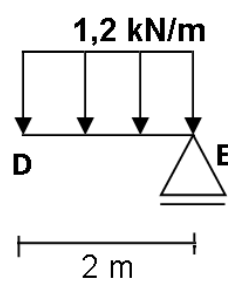
1º Passo - Análise das seções CEP (Com Estabilidade Própria) e SEP (Sem Estabilidade Própria)

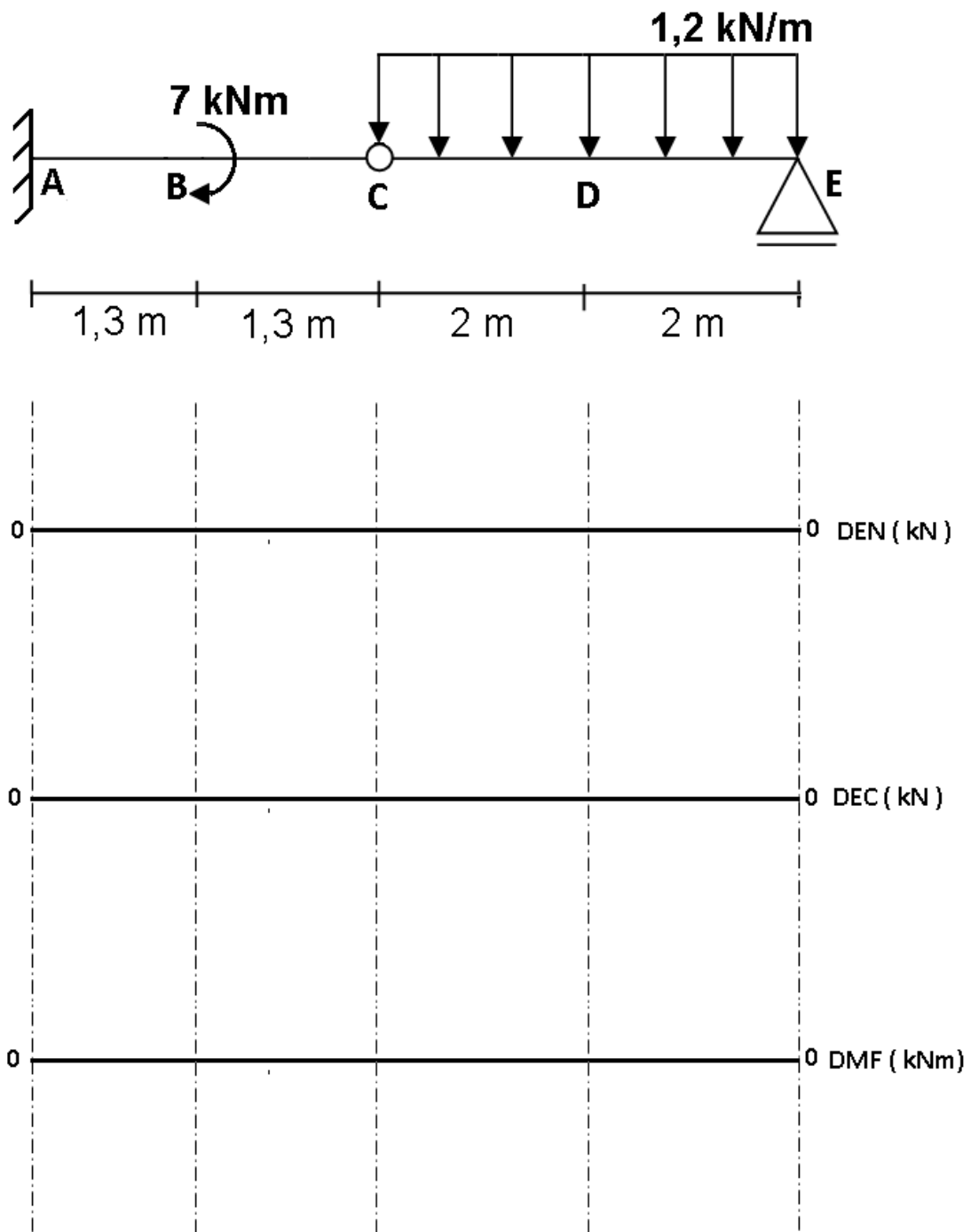


2º Passo – Cálculo dos Esforços Externos das Estruturas SEP

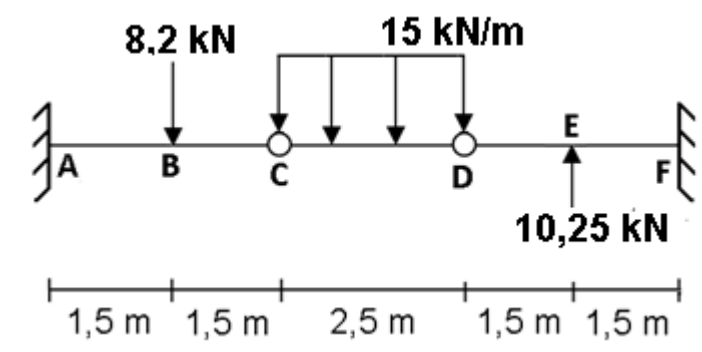


3º Passo – Cálculo dos Esforços Externos das Estruturas CEP4º Passo – Cálculo dos Esforços InternosPonto APonto B

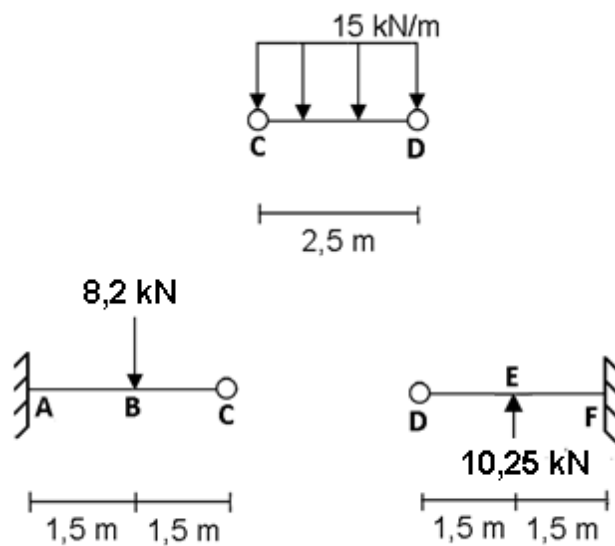
Ponto CPonto DPonto E

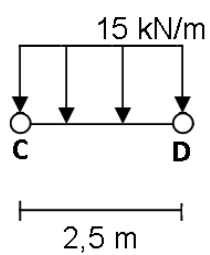
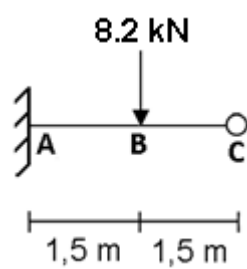
5º Passo – Elaboração dos Diagramas

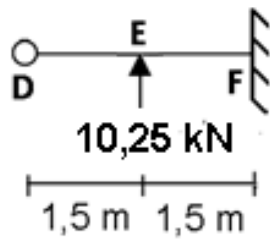
4)

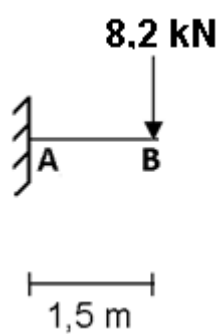
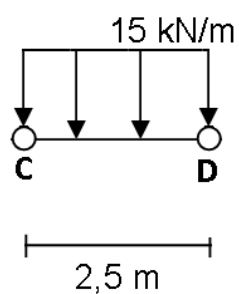
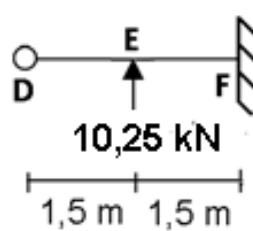


1º Passo - Análise das seções CEP (Com Estabilidade Própria) e SEP (Sem Estabilidade Própria)

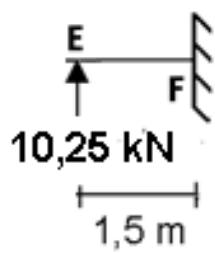


2º Passo – Cálculo dos Esforços Externos das Estruturas SEP3º Passo – Cálculo dos Esforços Externos das Estruturas CEP

Cálculo dos Esforços Externos das Estruturas CEP4º Passo – Cálculo dos Esforços InternosPonto A

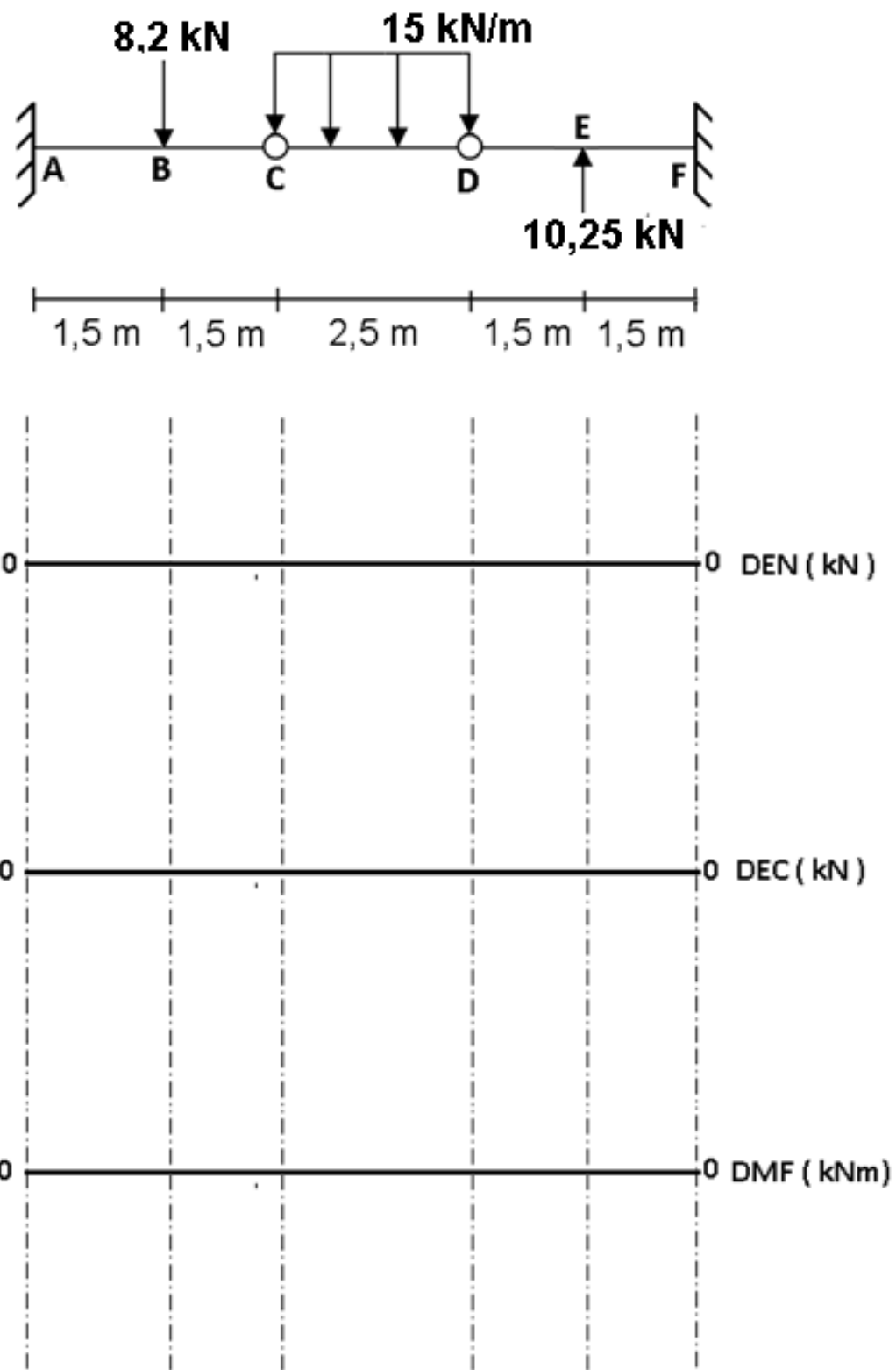
Ponto BPonto CPonto D

Ponto E



Ponto F



5º Passo – Elaboração dos Diagramas

Curso Análise de Estruturas Isostáticas

CANAL O CALCULISTA



➤ **Módulo V**

Treliças Planas

Módulo V – Treliças

Neste módulo falaremos sobre as treliças planas, aprenderemos como calcular as Reações de Apoio, os esforços de normal pelo Método dos Nós e pelo Método das Seções (Método de Ritter).

5. Treliças

Como surgiram as primeiras treliças?

Uma das aplicações mais antigas é a do engenheiro romano Apollodorus, que construiu sobre o Rio Danúbio uma ponte de treliças por volta de 105 d.C.

Foi durante a Revolução Industrial do século XIX, com a falta de ferro forjado na Europa e devido a expansão de linhas ferroviárias, que o uso das treliças ganhou força e diversos modelos foram desenvolvidos.

As treliças surgiram como um sistema mais econômico para vencer vãos cada vez maiores e com cargas mais elevadas. A seguir vamos conhecer os principais modelos de treliças:

Modelos de Treliças



O que é uma treliça?

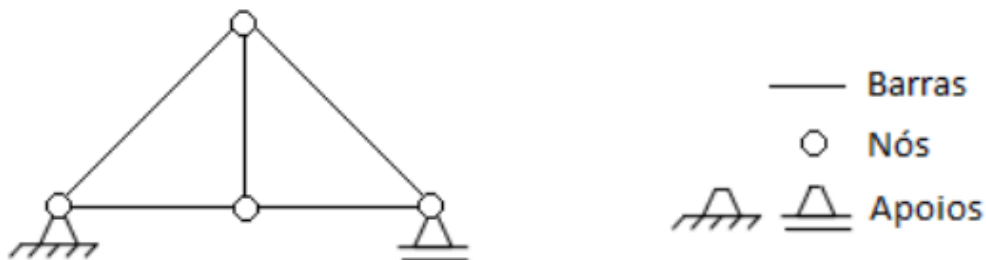
Uma TRELIÇA é um modelo estável de estruturas reticuladas, cujas barras possuem em suas extremidades articulações completas denominadas **RÓTULAS** ou **NÓS**.

No modelo estrutural treliça as cargas são aplicadas somente nos nós, assim, existe apenas um esforço interno nas barras, o **Esforço Normal**, que não varia ao longo da barra.

Veja exemplo na videoaula.

Classificação das Treliças Planas

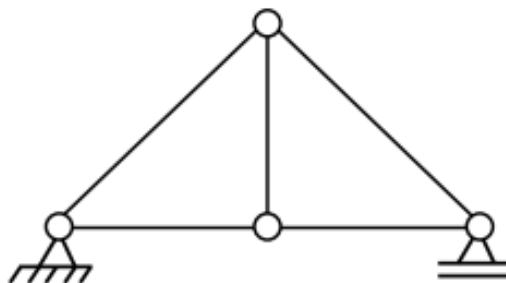
Uma treliça plana pode ser classificada em hipostática, isostática ou hiperestática. Para definir sua classificação precisamos conhecer seus componentes:



Exercícios Práticos

Classifique as estruturas abaixo como treliças hipostática, isostática ou hiperestática:

a)

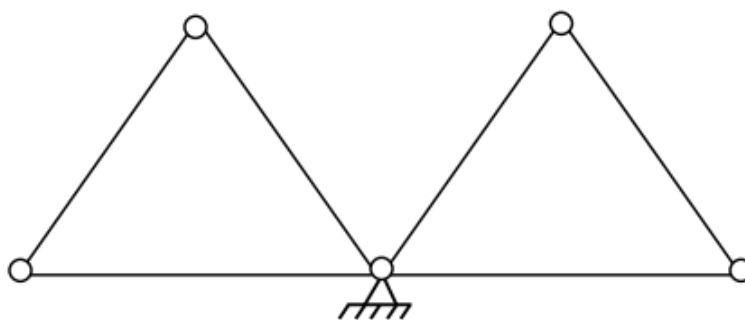


Nº de Barras

Nº de Reações de Apoio

Nº de Nós

b)

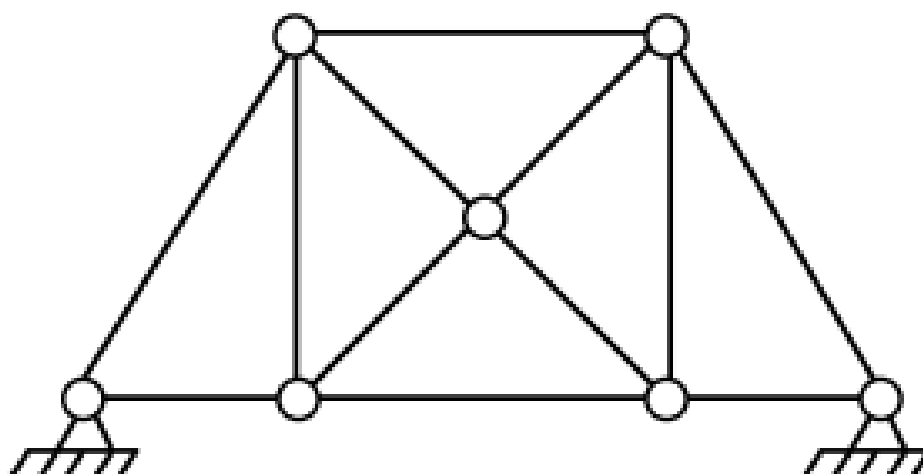


Nº de Barras

Nº de Reações de Apoio

Nº de Nós

c)



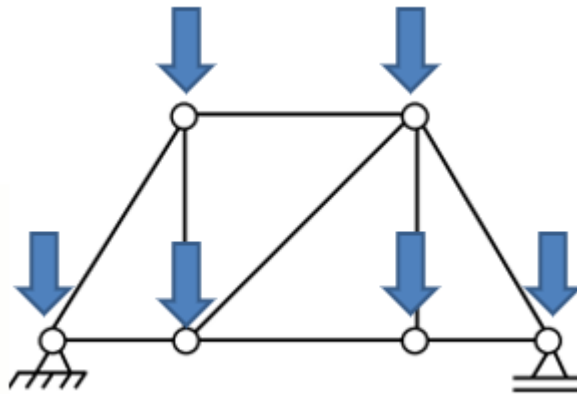
Nº de Barras

Nº de Reações de Apoio

Nº de Nós

Métodos para obtenção dos esforços da Treliça Plana

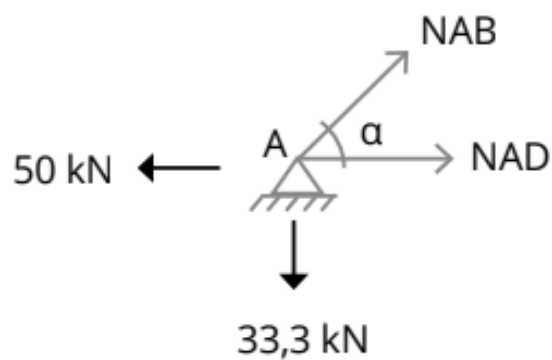
Em treliças, como já dito anteriormente, as cargas são aplicadas sobre os nós, sendo assim os únicos esforços internos serão os **ESFORÇOS NORMAIS**.



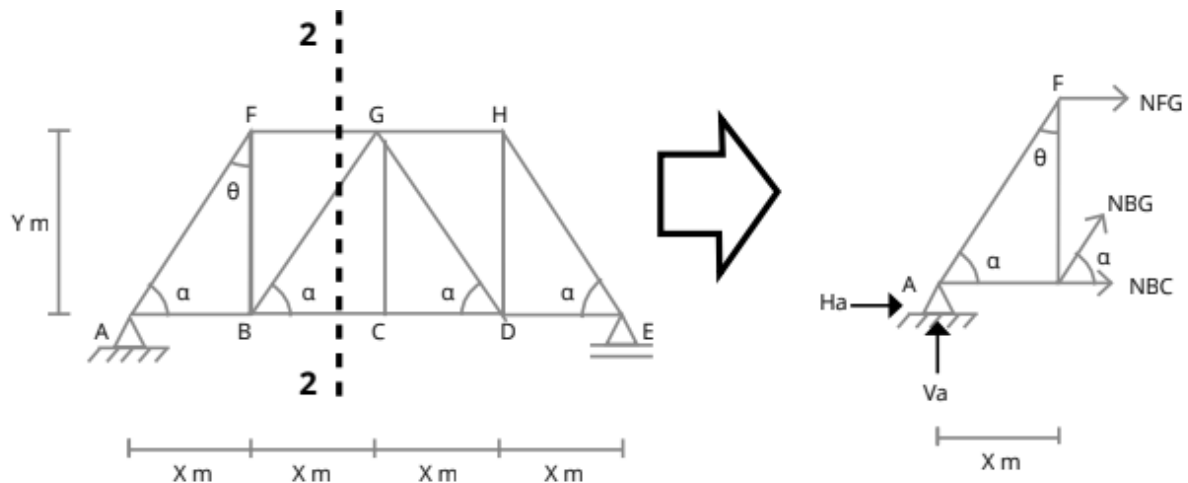
Esforço Normal	Tipo de ação sobre a barra	
NEGATIVO (-)	COMPRESSÃO	 COMPRESSÃO (-)
POSITIVO (+)	TRAÇÃO	 TRAÇÃO (+)

Para obtê-los poderemos usar dois métodos:

- Método dos Nós

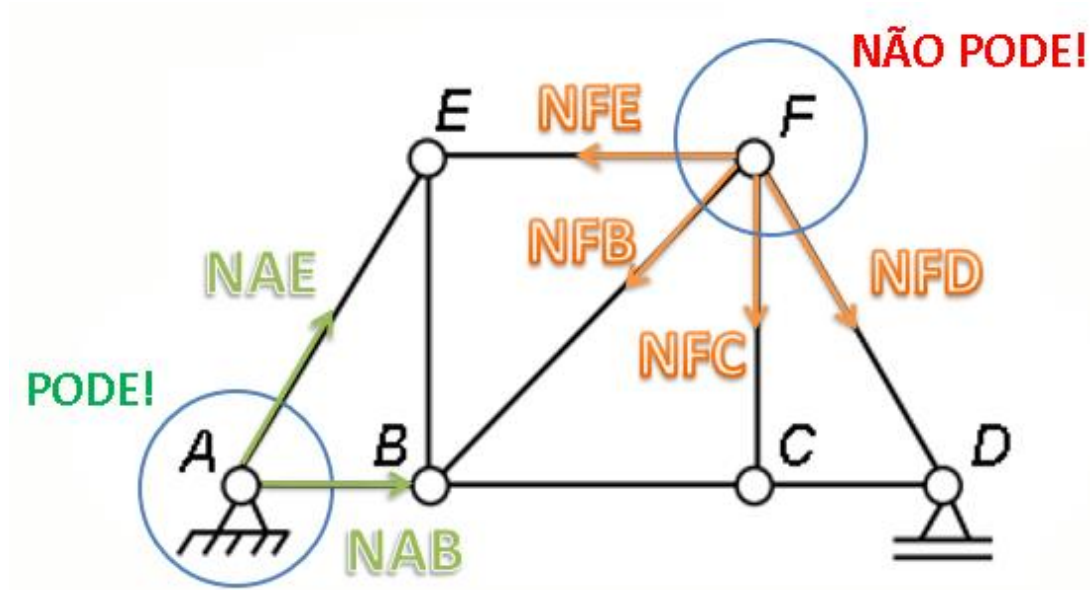


- Método de Ritter ou Método das Seções



5.1 - Método dos Nós

O Método dos Nós consiste em analisar cada nó isoladamente, estudando seu equilíbrio. Esse método deve ser iniciado pelos nós que possuam apenas **DUAS BARRAS** (duas incógnitas) pois se você escolhe um nó com mais de duas barras não será possível a solução do sistema.



Roteiro para o Método dos Nós

1º Passo – Cálculo das Reações de Apoio;

2º Passo – Escolher o nó a ser analisado;

3º Passo – Aplicação das equações de equilíbrio no nó escolhido (ΣF_y e ΣF_x);

4º Passo – Ir para o próximo nó.

Atenção!!

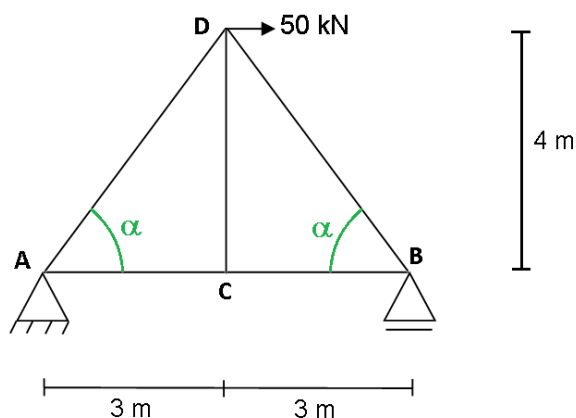
Muito cuidado na resolução de cada nó pois esse método apresenta o problema de acumular erros, caso você erre um esforço você errará todos os subsequentes.

ESFORÇOS NORMAIS

Esforço Normal	Tipo de ação sobre a barra	
NEGATIVO (-)	COMPRESSÃO	 COMPRESSÃO (-)
POSITIVO (+)	TRAÇÃO	 TRAÇÃO (+)

Exercícios de Método dos Nós:

1) Determine os Esforços Normais de todas as barras da treliça a seguir e as Reações de Apoio utilizando o Método dos Nós.

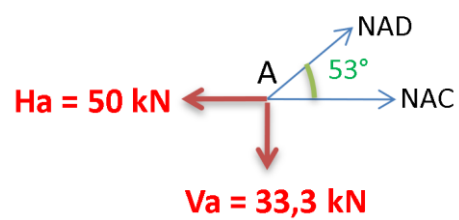


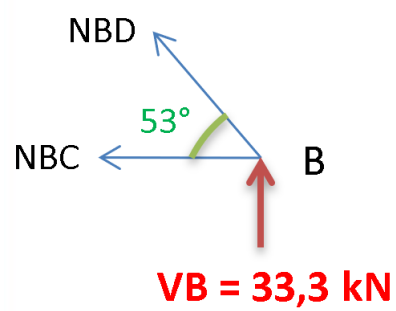
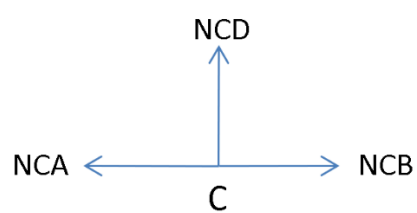
1º Passo – Verificação da Estaticidade:

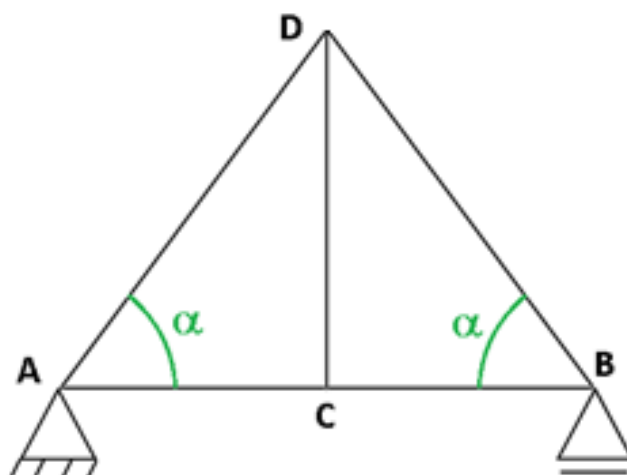
2º Passo – Cálculo dos Esforços Externos

3º Passo – Cálculo dos nós

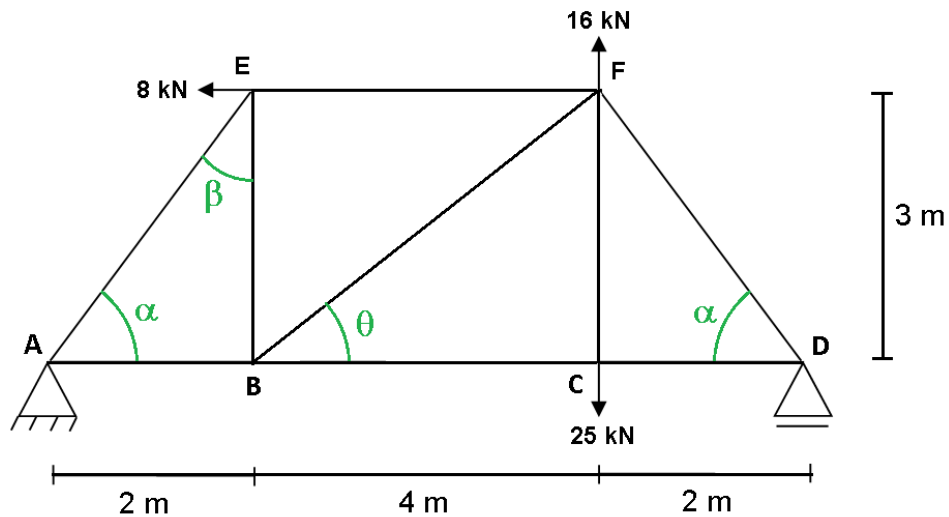
Nó A



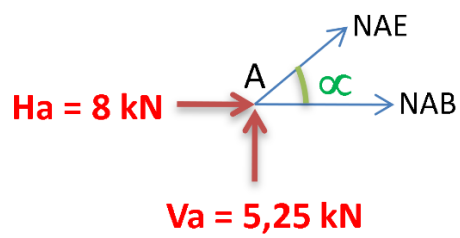
Nó BPonto C

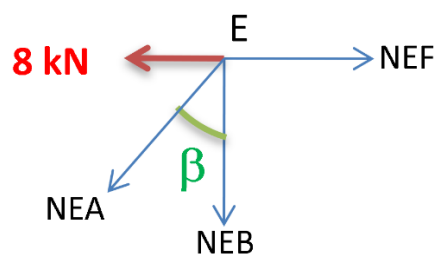
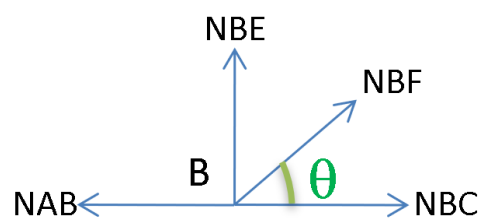
4º Elaboração do Diagrama de Esforços Normais

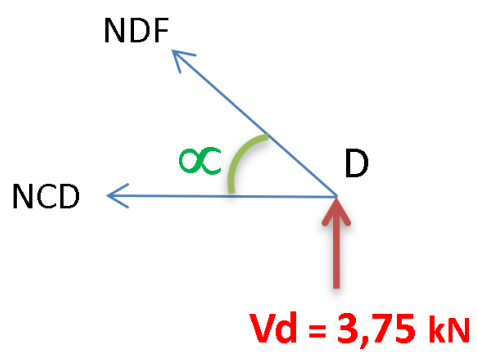
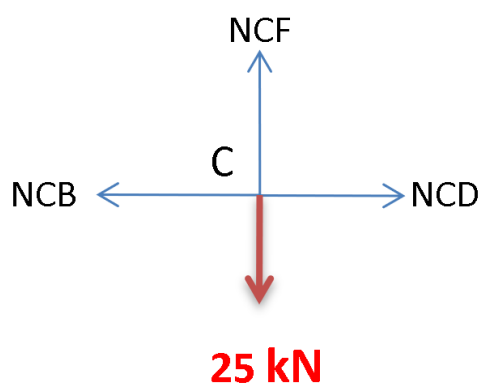
2) Determine os Esforços Normais de todas as barras da treliça a seguir e as Reações de Apoio utilizando o Método dos Nós.

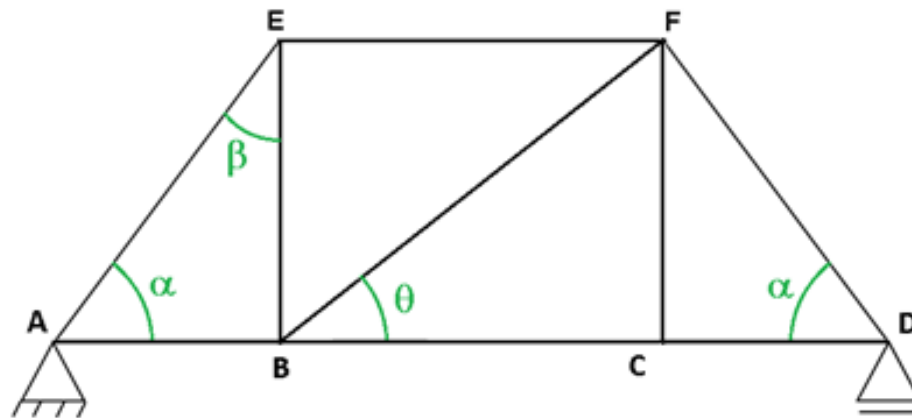


1º Passo – Verificação da Estaticidade:

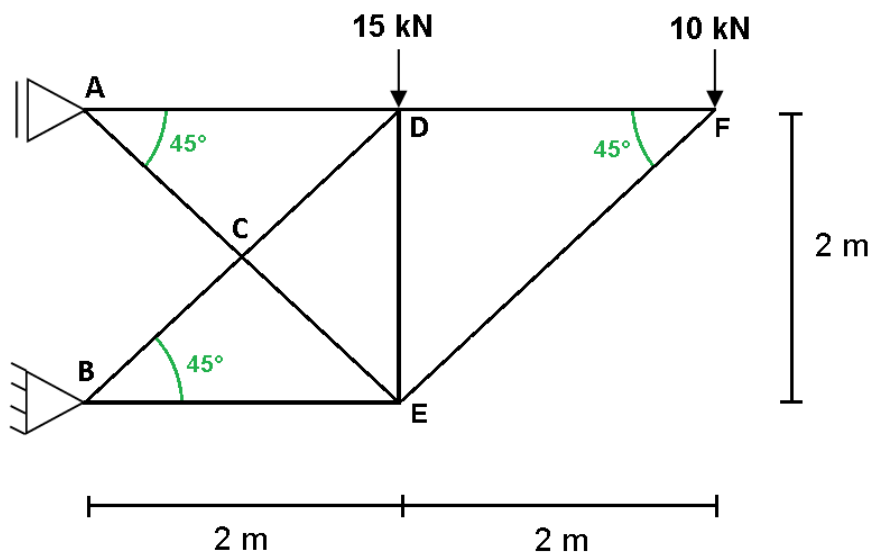
2º Passo – Cálculo dos Esforços Externos3º Passo – Cálculo dos nósNó A

Nó EPonto B

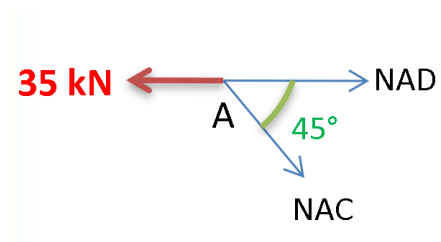
Nó DPonto C

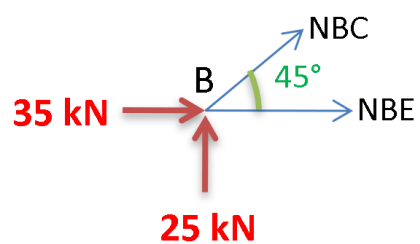
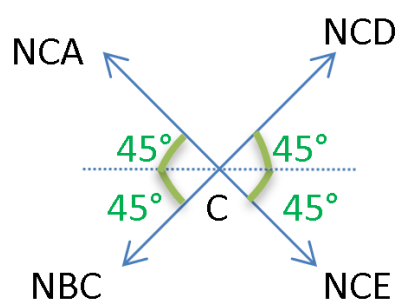
4º Elaboração do Diagrama de Esforços Normais

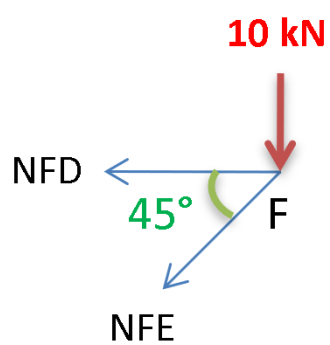
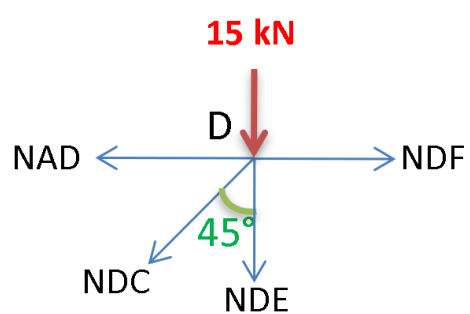
3) Determine os Esforços Normais de todas as barras da treliça a seguir e as Reações de Apoio utilizando o Método dos Nós.

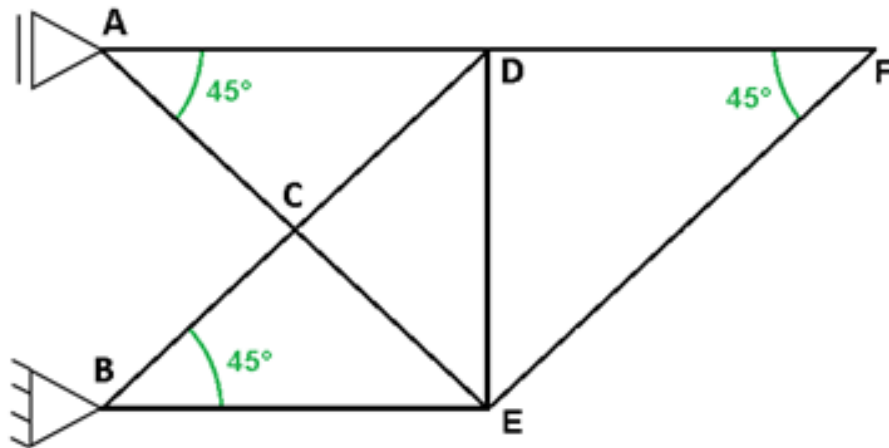


1º Passo – Verificação da Estaticidade:

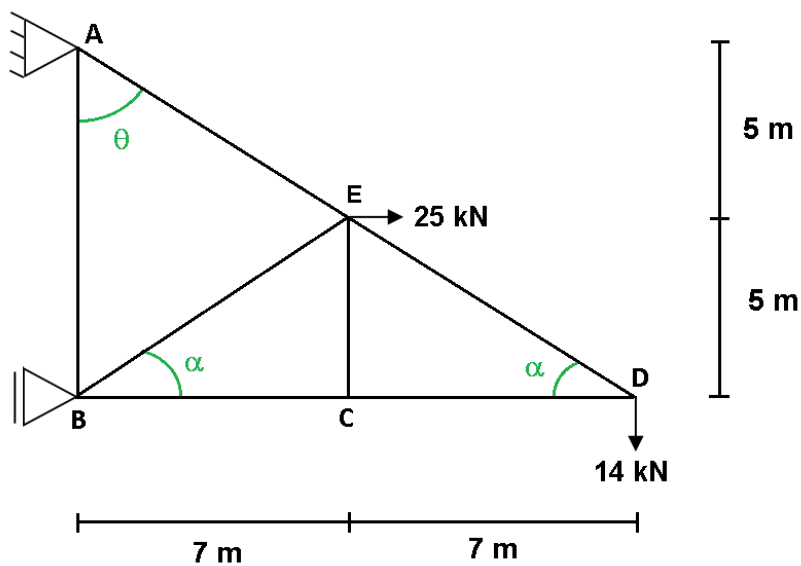
2º Passo – Cálculo dos Esforços Externos3º Passo – Cálculo dos nósNó A

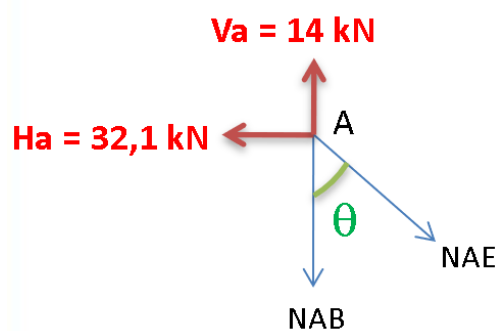
Nó BNó C

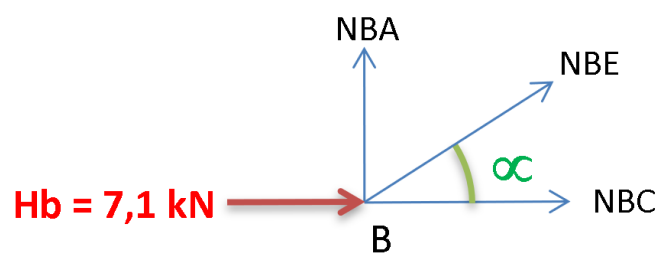
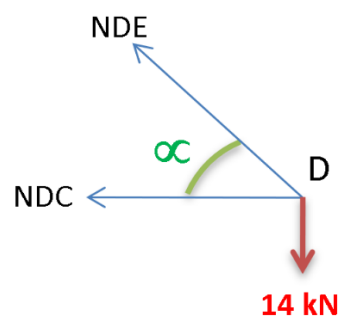
Nó FNó D

4º Elaboração do Diagrama de Esforços Normais

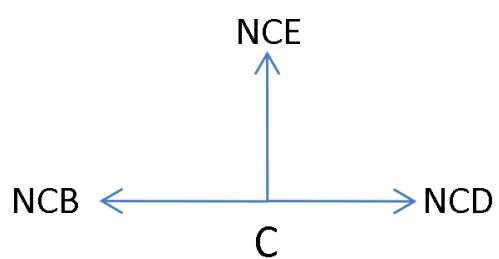
4) Determine os Esforços Normais de todas as barras da treliça a seguir e as Reações de Apoio utilizando o Método dos Nós.

1º Passo – Verificação da Estaticidade:

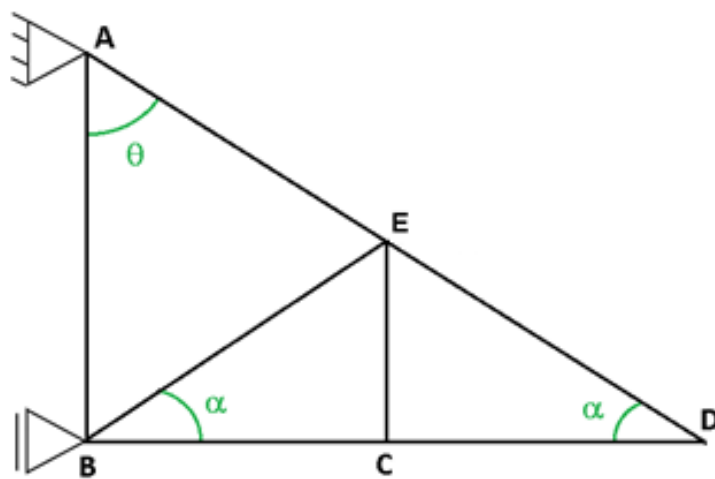
2º Passo – Cálculo dos Esforços Externos3º Passo – Cálculo dos nósNó A

Nó BNó D

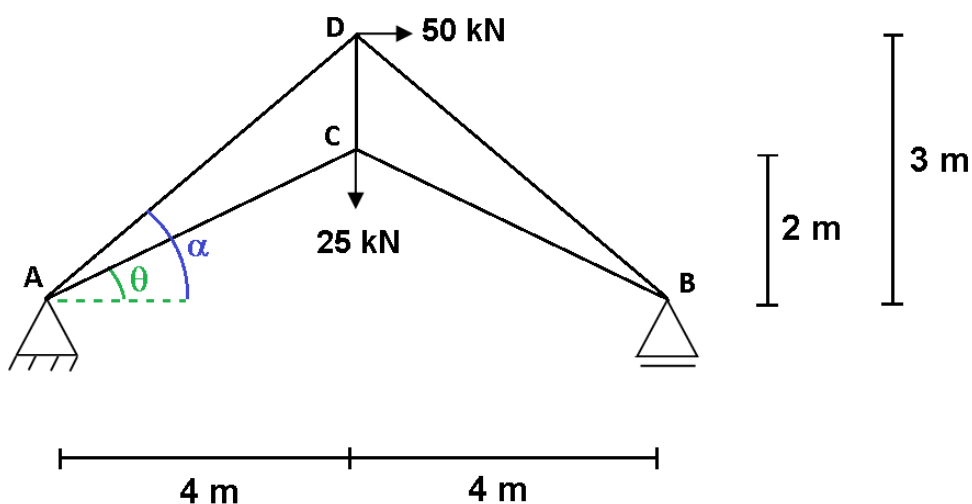
Nó C



4º Elaboração do Diagrama de Esforços Normais

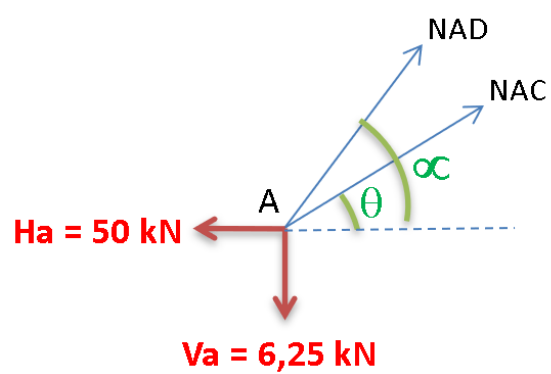


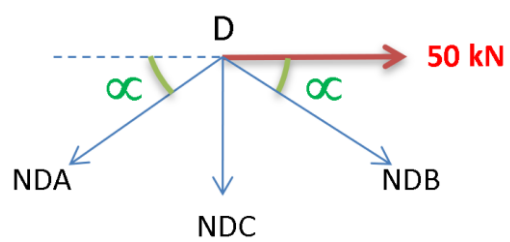
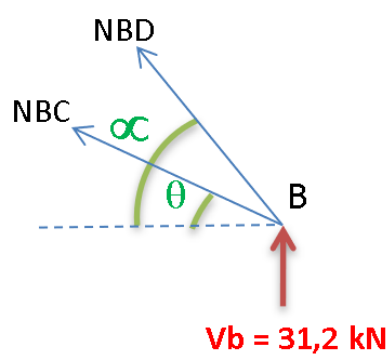
5) Determine os Esforços Normais de todas as barras da treliça a seguir e as Reações de Apoio utilizando o Método dos Nós.

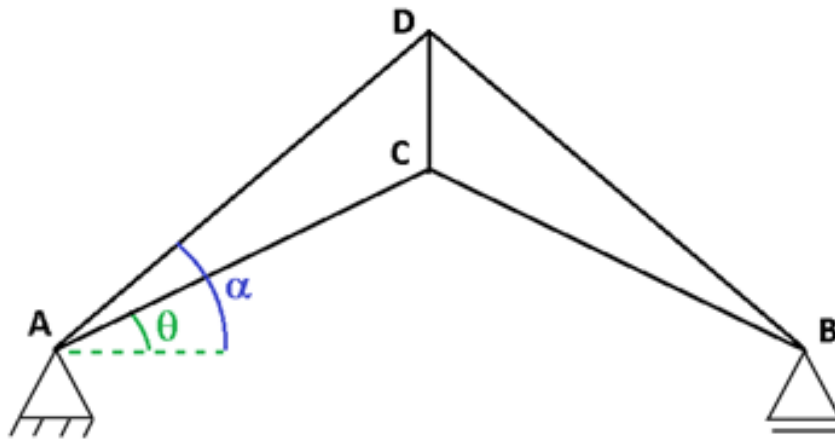


1º Passo – Verificação da Estaticidade:

2º Passo – Cálculo dos Esforços Externos

3º Passo – Cálculo dos nósNó A

Nó DNó B

4º Elaboração do Diagrama de Esforços Normais**5. 2 – Método das Seções – Método de Ritter**

Diferente do método dos nós, o Método das Seções (Método de Ritter) permite obter os esforços de até **três barras** por análise, sendo assim muito aplicado em treliças com grande número de barras.

Seu método usará as três equações do plano: ΣF_y , ΣF_x e ΣM .

Roteiro para o Método das Seções

1º Passo – Cálculo das Reações de Apoio;

2º Passo – Definir a seção que deverá:

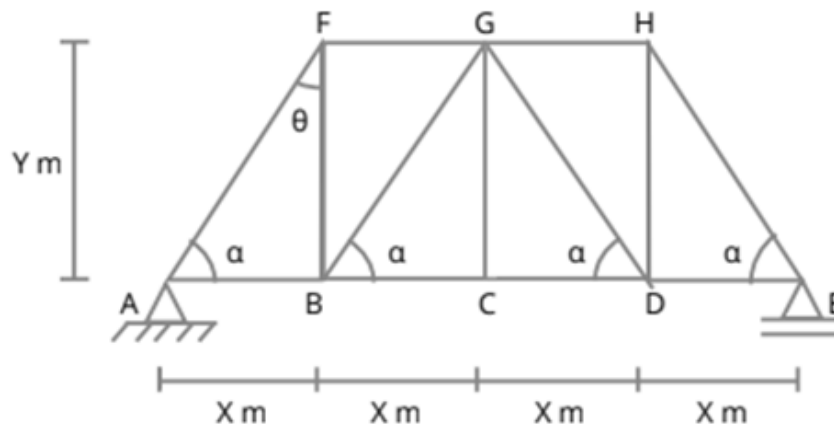
- a. Atravessar toda a treliça dividindo a em duas partes;
- b. Interceptar no máximo 3 barras.

3º Passo – Aplicação das equações de equilíbrio na seção escolhida (ΣF_y , ΣF_x e ΣM);

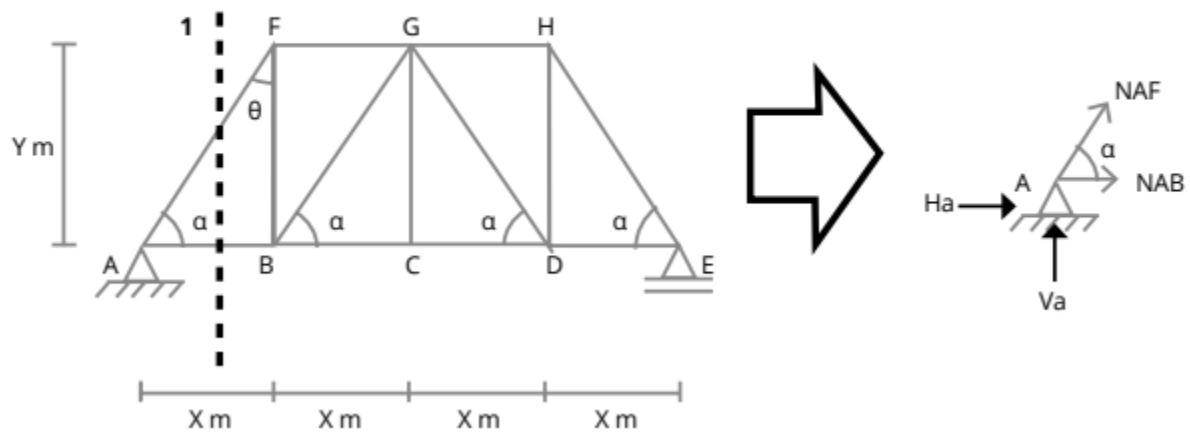
4º Passo – Ir para a próxima seção.

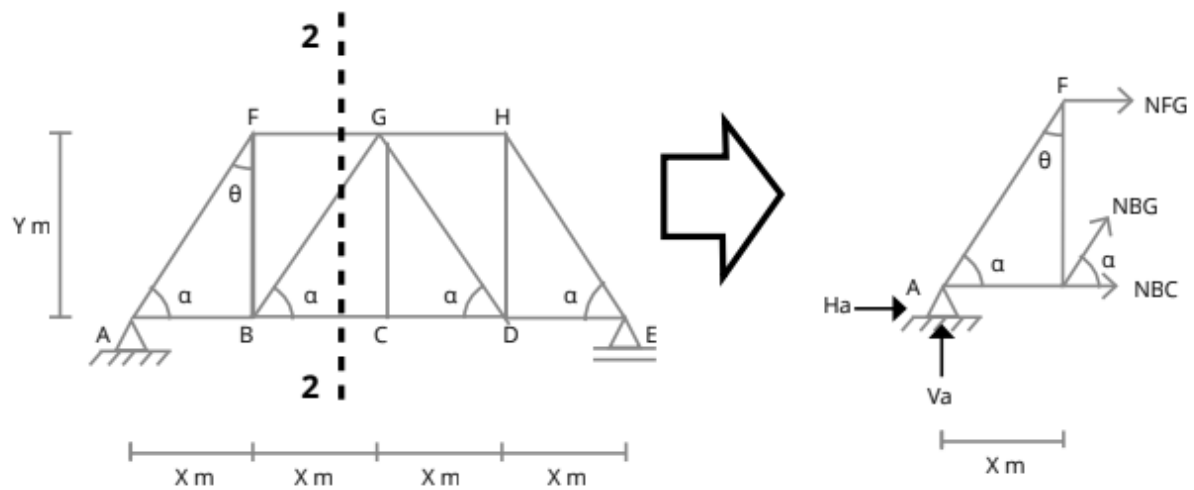
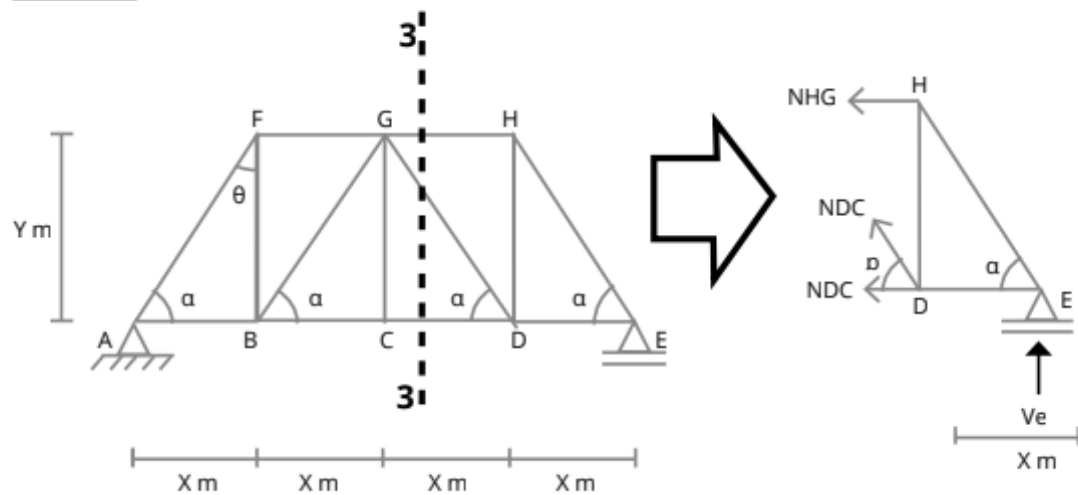
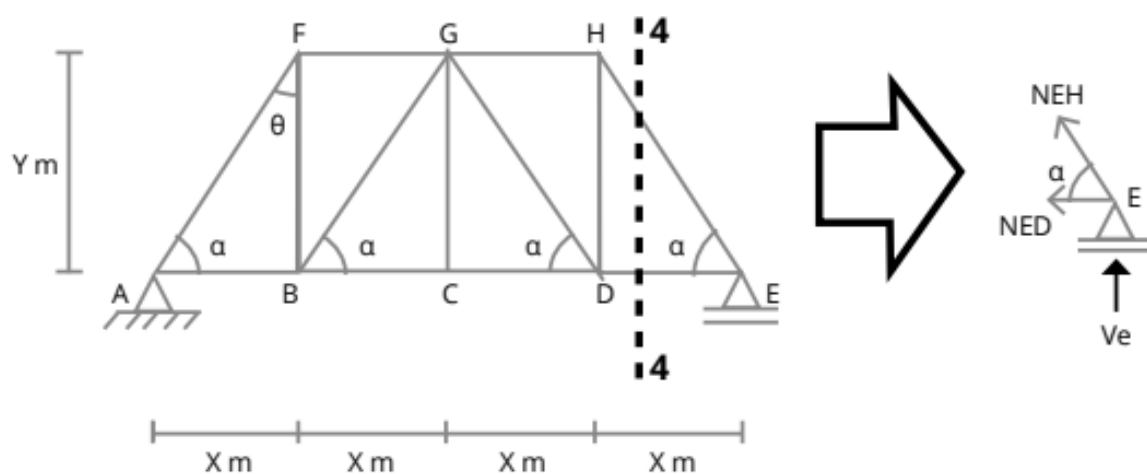
Esforço Normal	Tipo de ação sobre a barra	
NEGATIVO (-)	COMPRESSÃO	 COMPRESSÃO (-)
POSITIVO (+)	TRAÇÃO	 TRAÇÃO (+)

Exemplo:



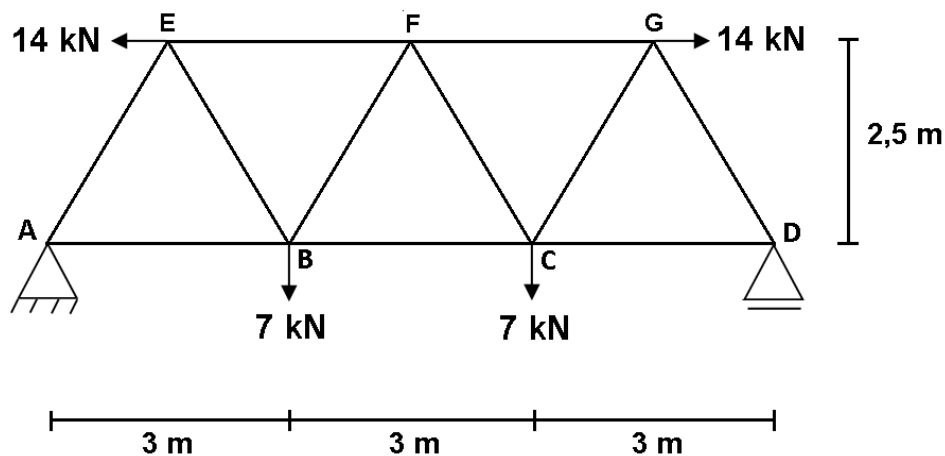
Corte 1



Corte 2**Corte 3****Corte 4**

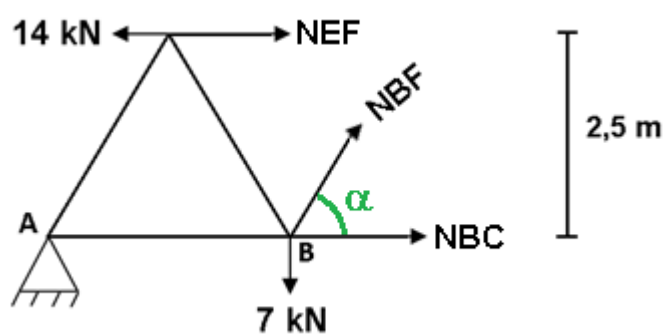
Exercícios de Método das Seções (Método de Ritter):

6) Determine as reações de apoio e os esforços de normal das barras EF, BF e BC utilizando o Método das Seções.

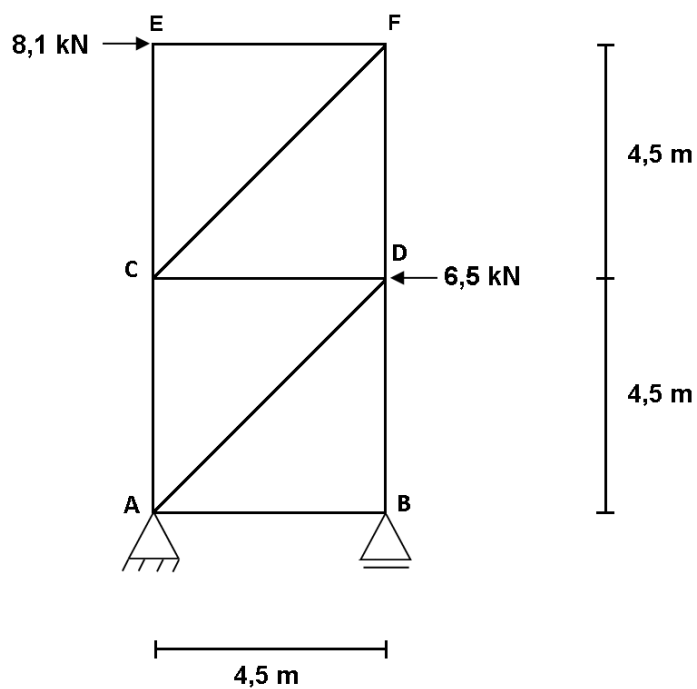


1º Passo – Verificação da Estaticidade:

2º Passo – Cálculo dos Esforços Externos

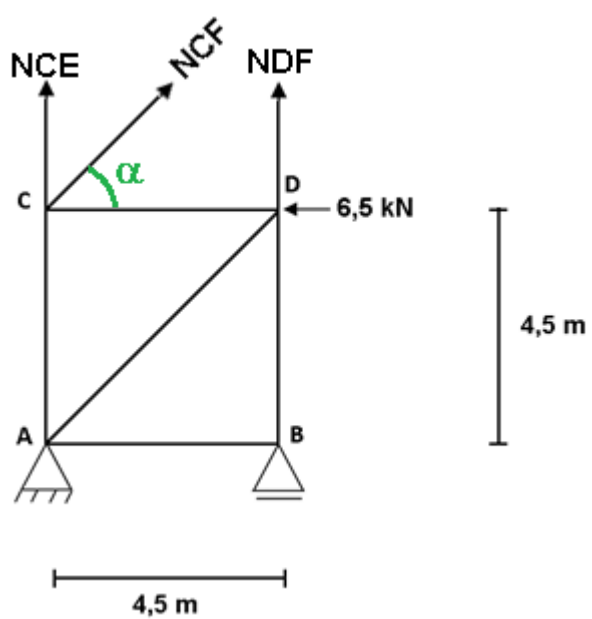
3º Passo – Cálculo da Seção EF, BF e BC

7) Determine as reações de apoio e os esforços de normal das barras CE, CF e DF utilizando o Método das Seções.

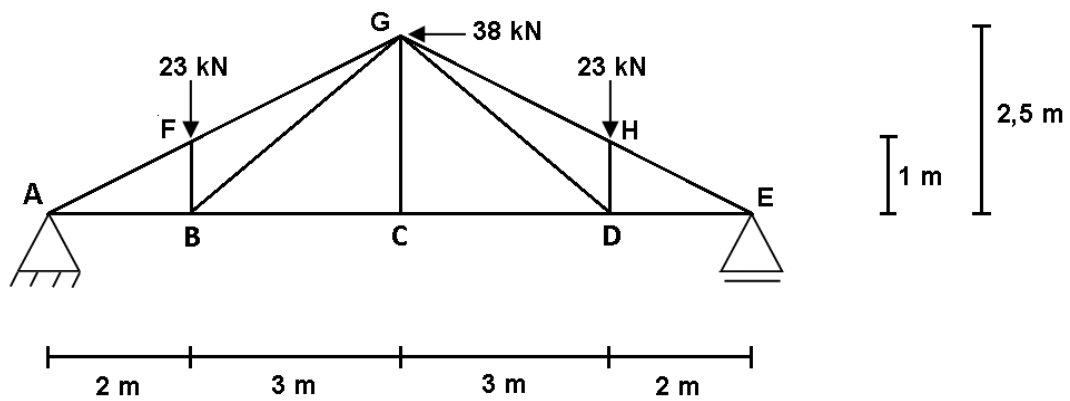


1º Passo – Verificação da Estaticidade:

2º Passo – Cálculo dos Esforços Externos

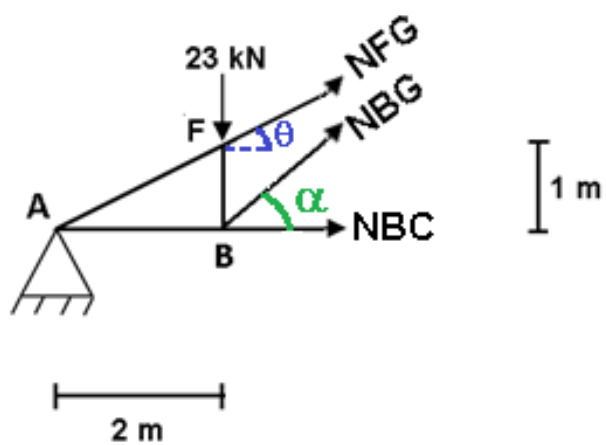
3º Passo – Cálculo da Seção CE, CF e DF

8) Determine as reações de apoio e os esforços de normal das barras FG, BG e BC utilizando o Método das Seções.

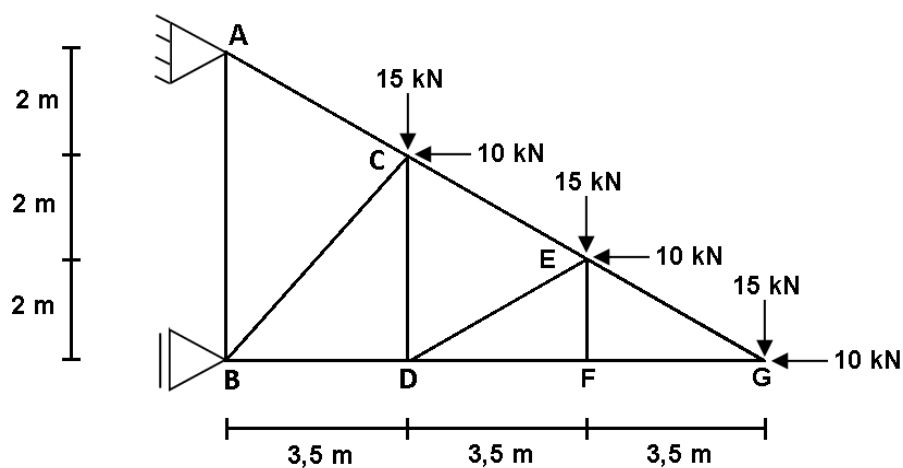


1º Passo – Verificação da Estaticidade:

2º Passo – Cálculo dos Esforços Externos

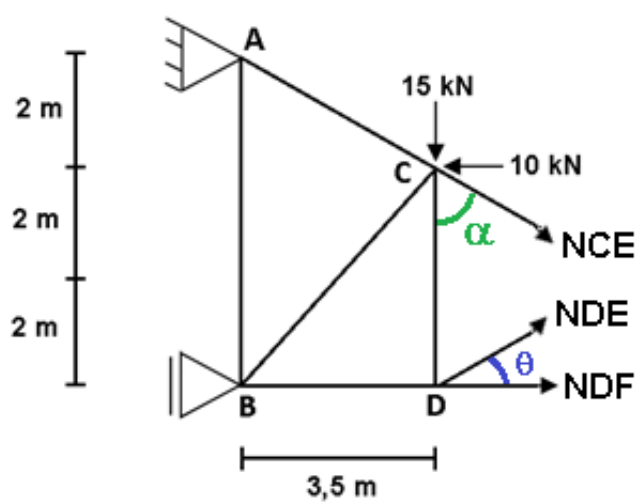
3º Passo – Cálculo da Seção FG, BG e BC

9) Determine as reações de apoio e os esforços de normal das barras CE, DE e DF utilizando o Método das Seções.

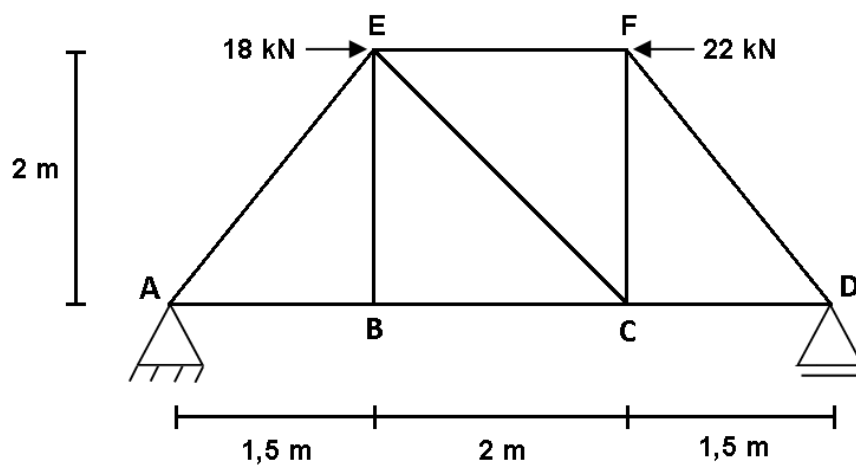


1º Passo – Verificação da Estaticidade:

2º Passo – Cálculo dos Esforços Externos

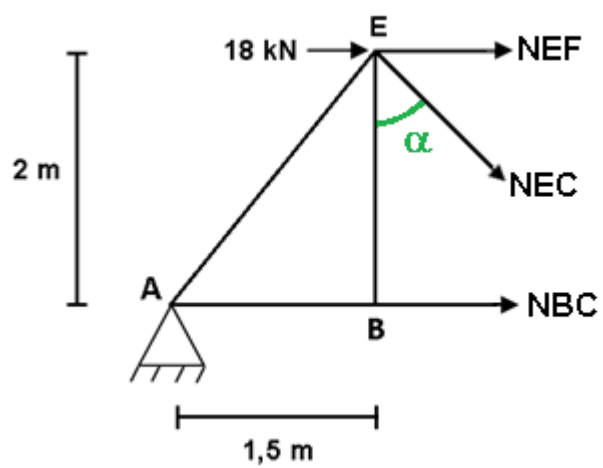
3º Passo – Cálculo da Seção CE, DE e DF

10) Determine as reações de apoio e os esforços de normal das barras EF, EC e BC utilizando o Método das Seções.



1º Passo – Verificação da Estaticidade:

2º Passo – Cálculo dos Esforços Externos

3º Passo – Cálculo da Seção EF, EC e BC

Curso Análise de Estruturas Isostáticas

CANAL O CALCULISTA



➤ **Módulo VI**
Grelhas

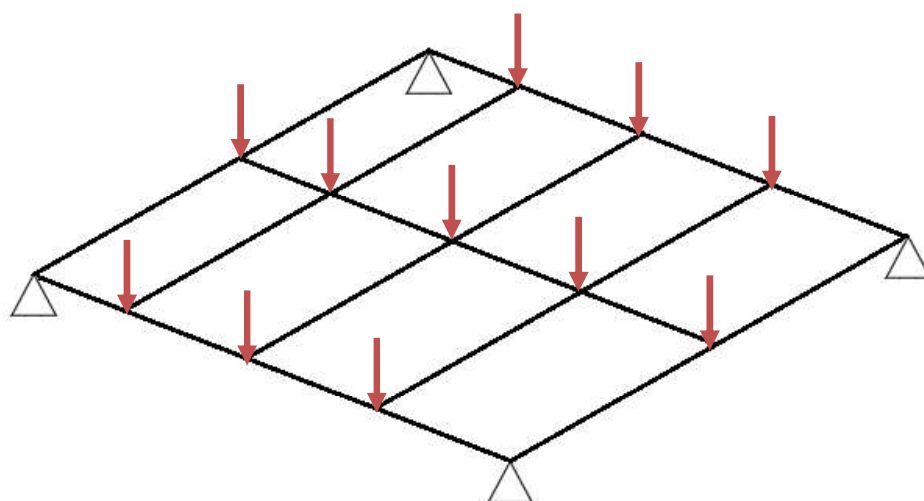
Módulo VI – Grelhas

6. Grelhas

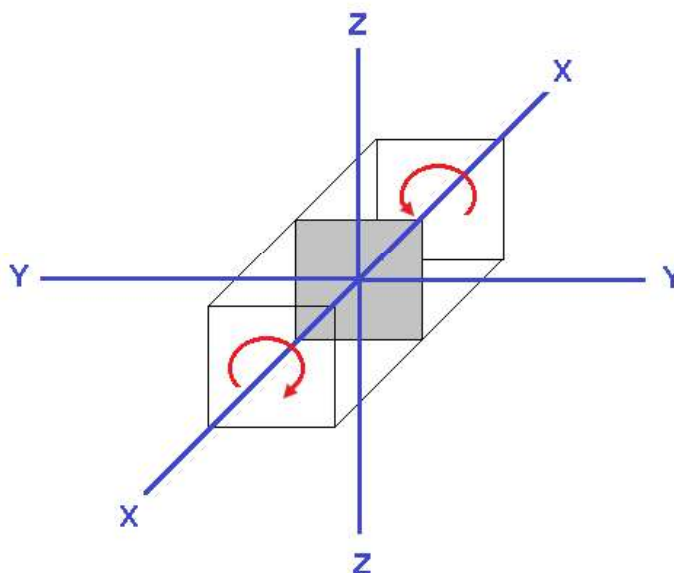
Neste módulo falaremos sobre as grelhas, que são estruturas formadas por elementos de barras retilíneas ou curvas, posicionados em um mesmo plano, submetidas às ações externas que atuam **perpendiculares** ao plano da grelha.

Essas cargas criam na estrutura solicitações de **Esforço Cortante**, **Momento Fletor** e **Momento Torçor**.

Podemos observar que não aparecem aqui o **Esforço Normal**, tendo em vista que, como dito anteriormente, as cargas são aplicadas perpendiculares ao plano, como na imagem a seguir:



Também podemos notar que agora aparece um novo esforço, denominado **Momento Torçor**, esse tipo de Momento ocorre quando há uma rotação entorno do próprio eixo longitudinal:

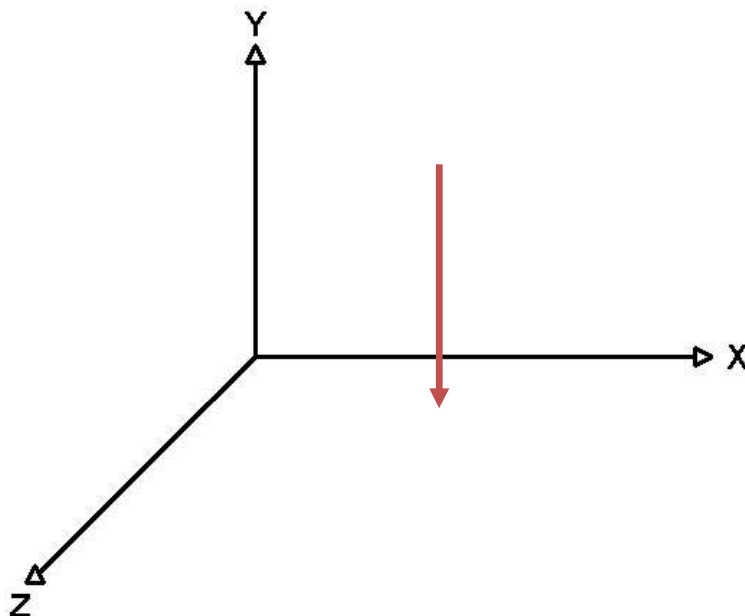


Estaticidade

Com essas duas observações, de que não temos Esforço Normal e sim Momento Torçor, como ficam então as Equações da Estática que antes eram $\sum Fy = 0, \sum Fx = 0, \sum M = 0$?

Como podemos observar agora em nossos eixos de referências, notaremos que das 6 equações da estática disponíveis, apenas 3 (três) atuaram para o equilíbrio do sistema estrutural:

Sendo elas $\sum Fy = 0, \sum Mx = 0, \sum Mz = 0$.

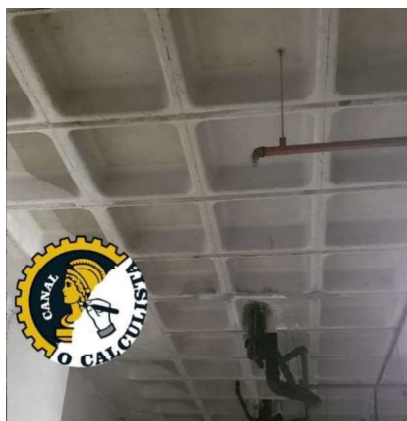


As demais equações $\sum Fx = 0, \sum Fz = 0, \sum My = 0$ serão apenas identidades, pois não terão componentes nas direções x e z, nem formarão momentos em torno de Y, por serem paralelas.

Obs.: Deve sempre observar os eixos dado no exercício!!!!!!!

Onde podemos encontrar as grelhas?

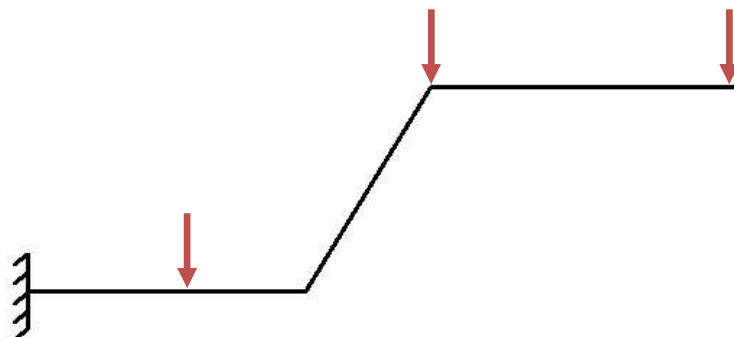
As grelhas podem ser vistas na construção civil em estruturas como lajes nervuradas, combinações de vigas interligadas e apoiadas em seus pilares, que recebam cargas verticais.



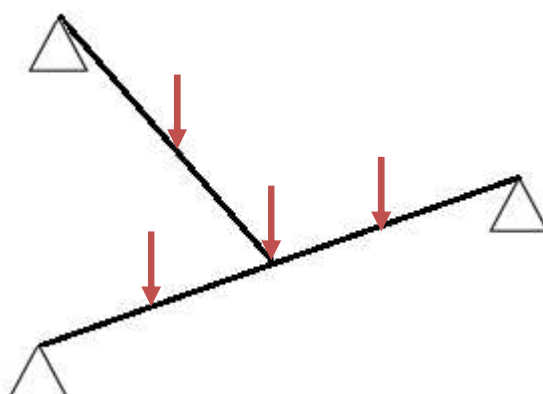
Tipos de grelhas

Os tipos mais comuns de grelhas são:

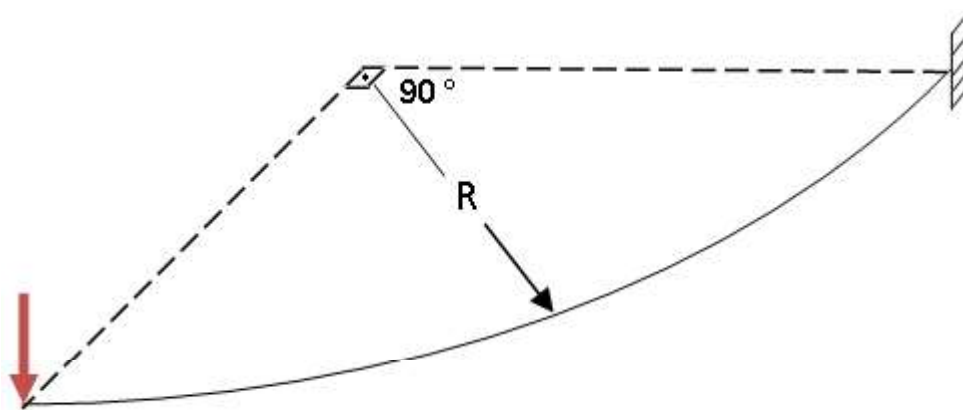
Grelhas em balanço:



Grelha triapoiadas:

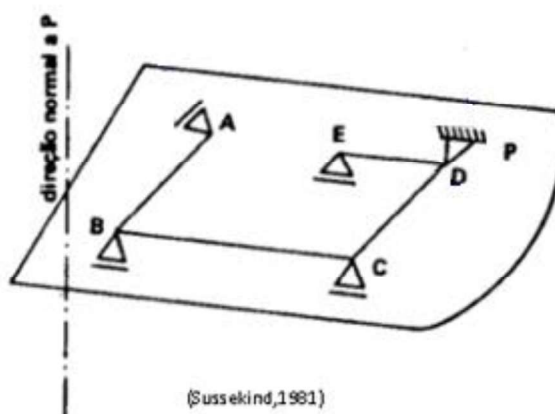


Viga-balcão: (Sussekind, 1981)



Classificação das Grelhas

Como o próprio Sussekind, 1981, relata em seu livro, tendo em vista a definição de grelha, não há a necessidade de restringir possíveis deslocamentos paralelos ao eixo xz, pois as ações externas não terão componentes atuando na horizontal.



Classificação das grelhas

A partir disso, vamos para a classificação das grelhas, que podem ser classificadas em: HIPOSTÁTICAS, ISOSTÁTICAS E HIPERESTÁTICAS.

As grelhas HIPOSTÁTICAS, são aquelas que apresentam um número inferior de apoios em relação as Equações da Estática.

As grelhas ISOSTÁTICAS, são quando apresentam apenas três incógnitas a determinar, assim terá o mesmo número de incógnitas disponíveis ($\sum Fy = 0$, $\sum Mx = 0$, $\sum Mz = 0$).

As grelhas HIPERESTÁTICAS, são quando apresentam quatro ou mais incógnitas.

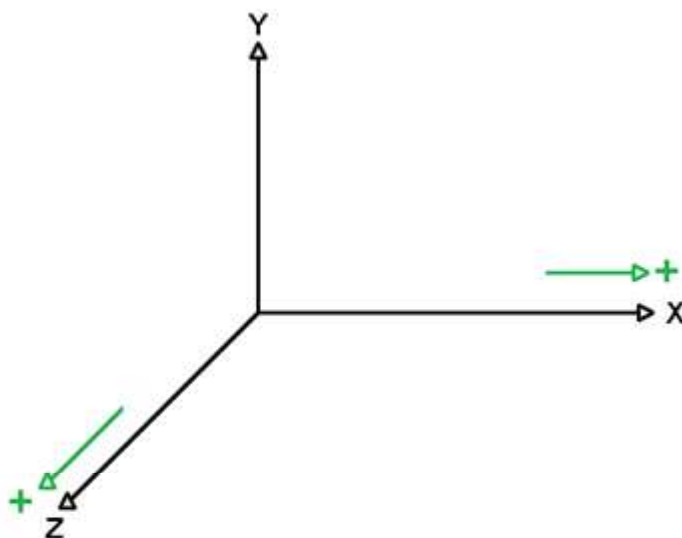
Convenção de Sinais – ESFORÇOS EXTERNOS

Como agora estamos falando em dois momentos, o Momento Torçor e o Momento Fletor, vamos adotar uma regra conhecida por todos para adotarmos os sentidos positivos e negativos: a **regra da mão direita**.

Sim, aquela regra usada em muitas matérias onde o **SENTIDO POSITIVO** será o nosso **POLEGAR**.

Então funciona da seguinte maneira, se o sentido do “polegar” do momento (Mx ou Mz) analisado, foi igual ao sentido do eixo (x ou z) então será **POSITIVO**, caso contrário, **NEGATIVO**.

Usaremos como valores dos eixos positivos a seguinte referência:

**Roteiro para cálculo de grelhas:**

1° Passo – Cálculo das Reações de Apoio

2° Passo – Equilíbrio das Barras

3° Passo – Esforços internos

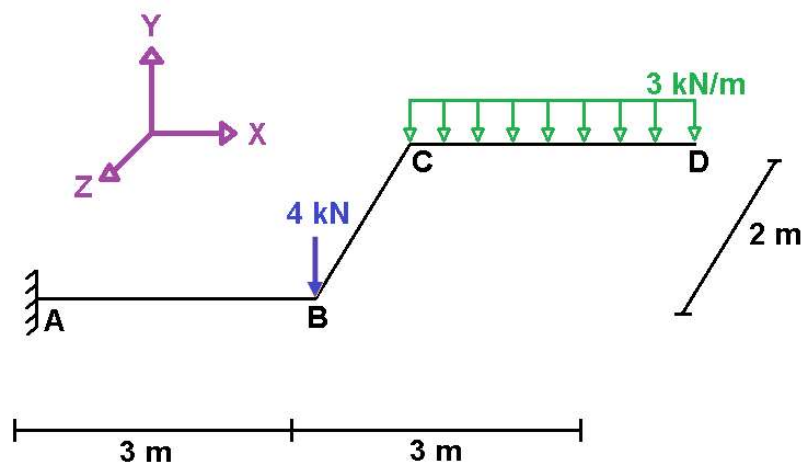
4° Passo – Montagem dos Diagramas de Momento Torçor, Cortante e Momento Fletor.

Dica: Para o cálculo das Reações de Apoio você poderá deslocar o eixo de referência de forma a facilitar a determinações das R.A.

Anote aqui suas observações:

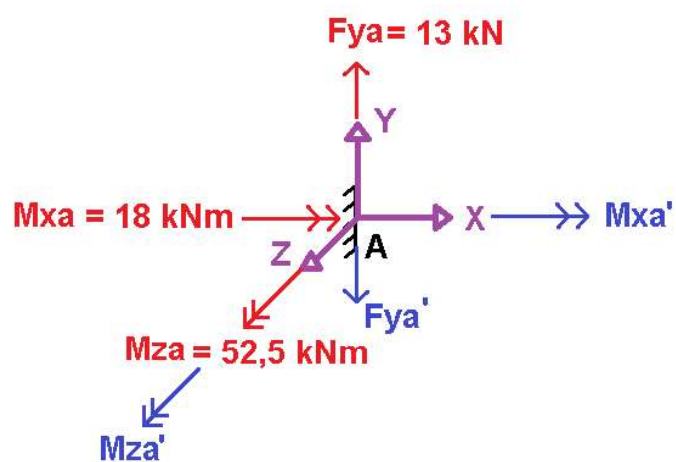
Vamos para os exercícios:

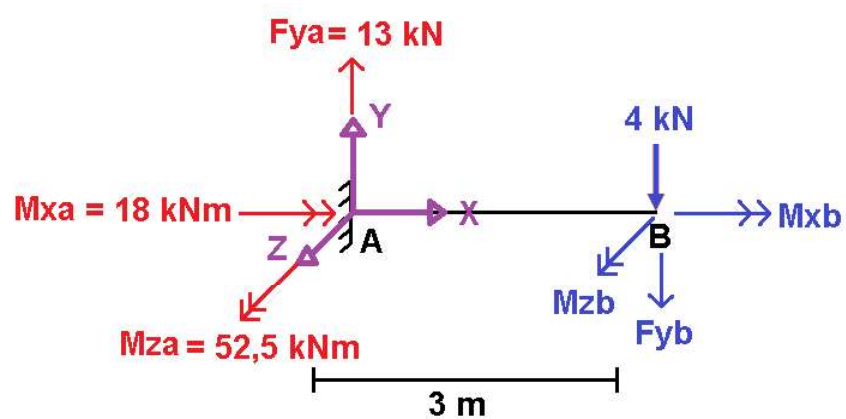
1) Calcule as Reações de Apoio e elabore os Diagramas de Cortante, Momento Torçor e Momento Fletor.

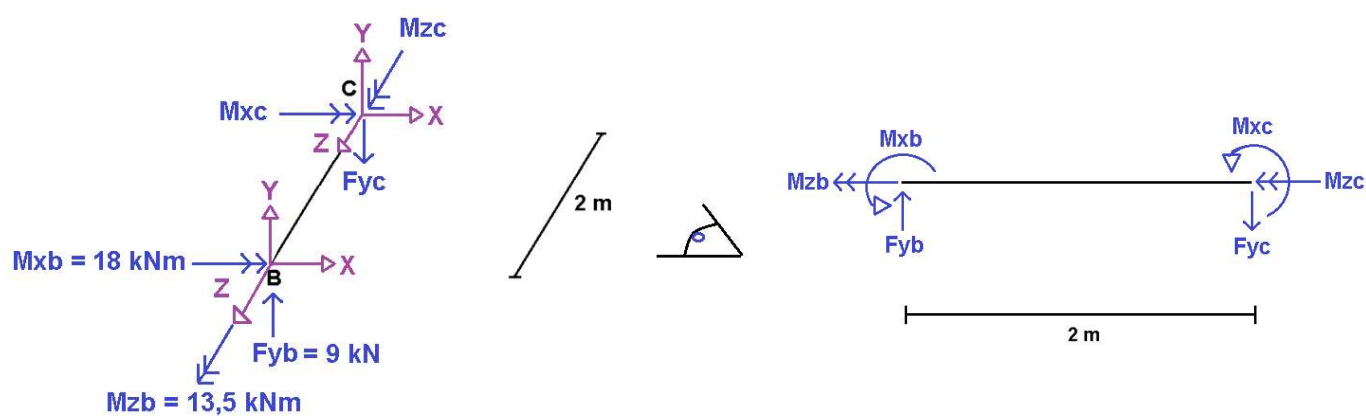


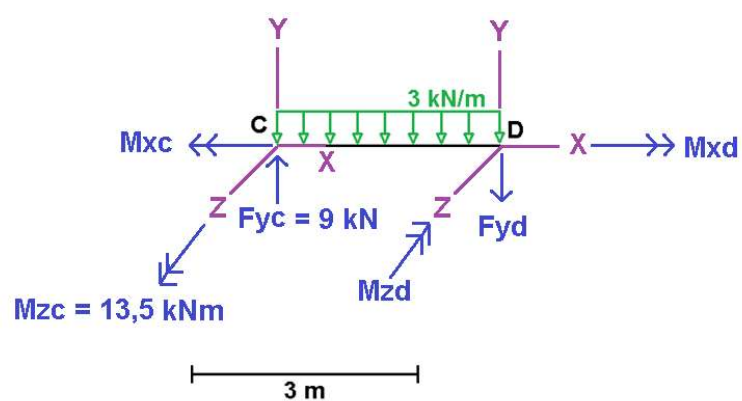
1° Passo – Cálculo das Reações de Apoio

2º Passo – Equilíbrio das Barras

Ponto A

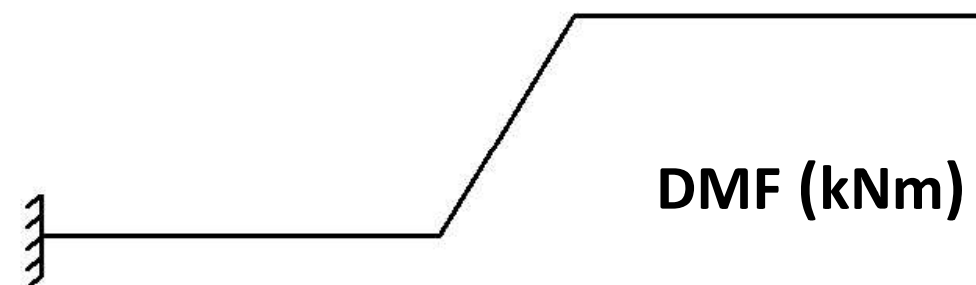
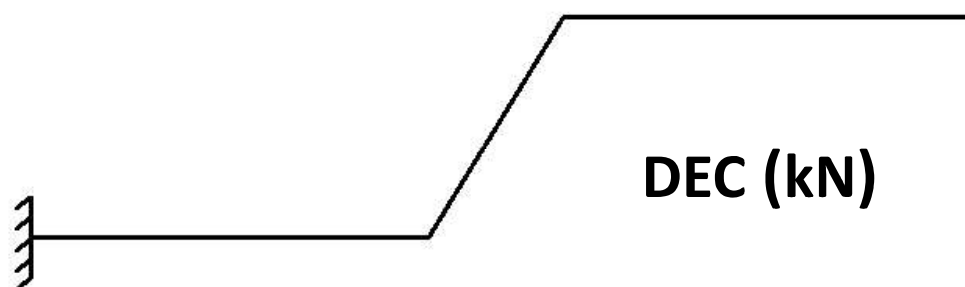
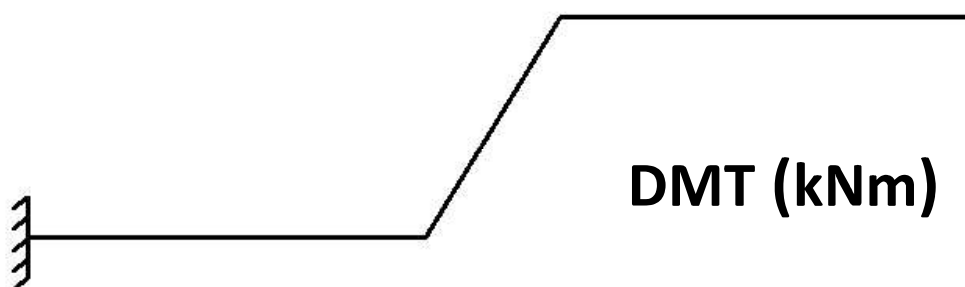
Barra AB

Barra BC

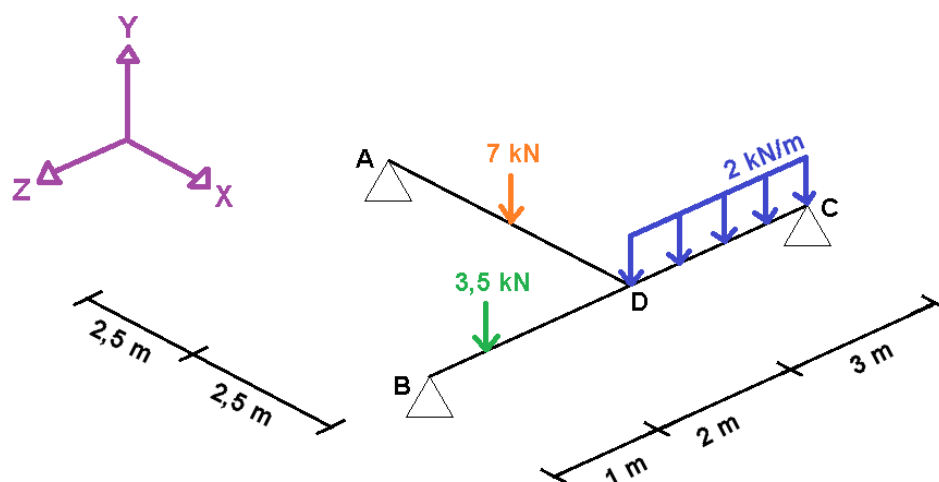
Barra CD

3° Passo – Esforços internos

Nesse exercício os pontos relevantes são os próprios ponto A, B, C e D, podendo já fazermos os Diagramas.

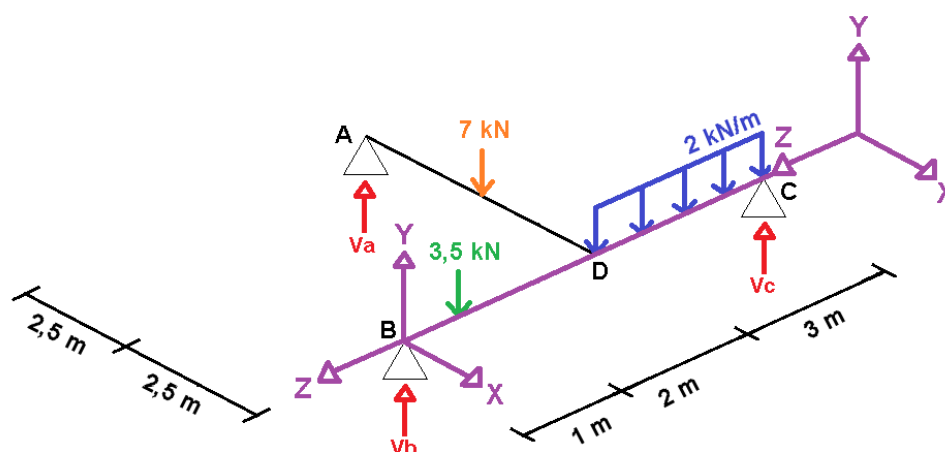
4° Passo – Montagem dos Diagramas de Momento Torçor, Cortante e Momento Fletor.

2) Calcule as Reações de Apoio e elabore os Diagramas de Cortante, Momento Torçor e Momento Fletor.

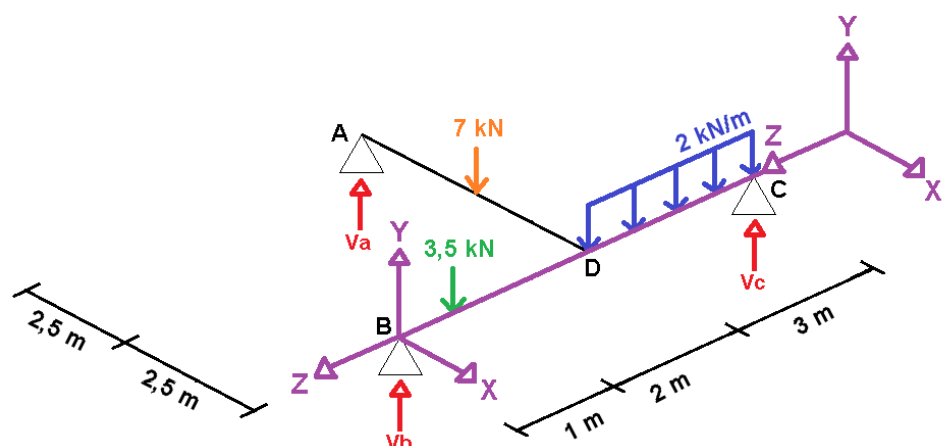


Resolução:

1º Passo – Deslocando o eixo para a barra BC.



2° Passo – Deslocando o eixo para o Ponto B – Você também pode deslocar para o Ponto C.

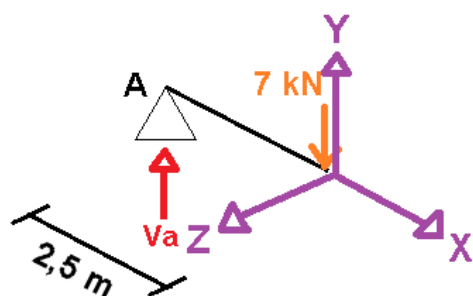


Faça agora da maneira de superposição das vigas, conforme apresentado na videoaula:

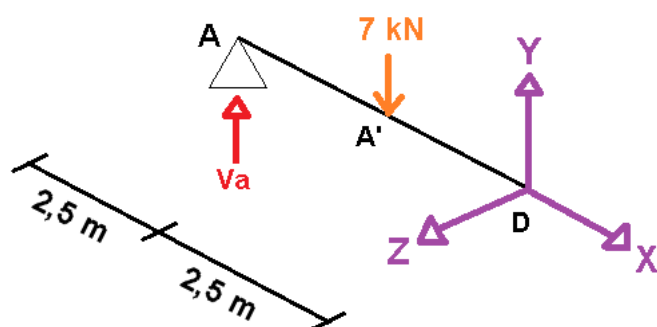
Qual você achou melhor?

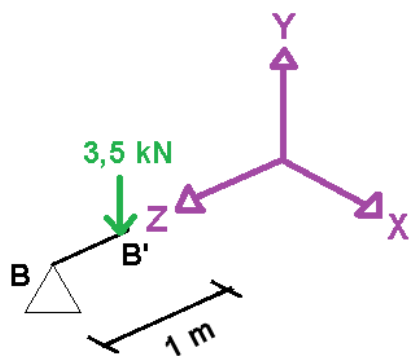
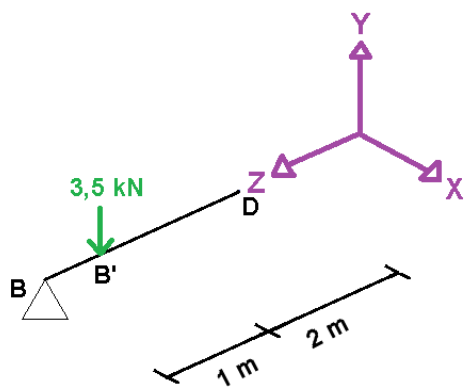
3º Passo – Cálculo dos esforços internos:

Trecho A-A'



Trecho A-D



Trecho B-B'Trecho B-D

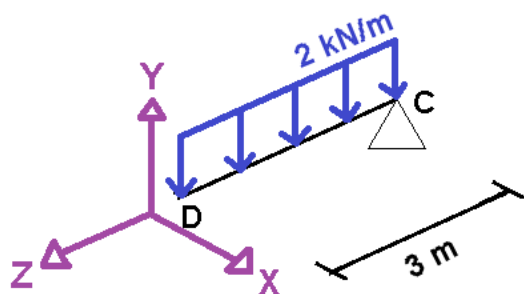
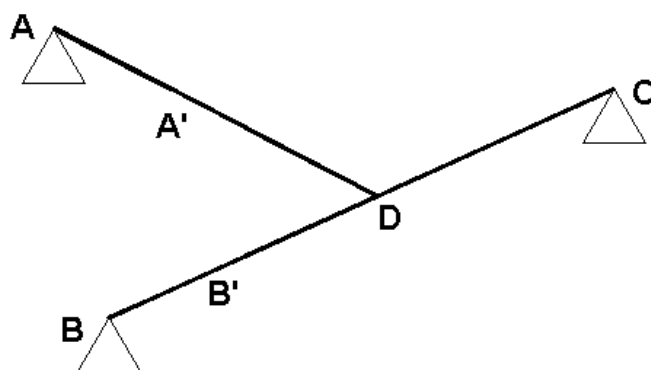
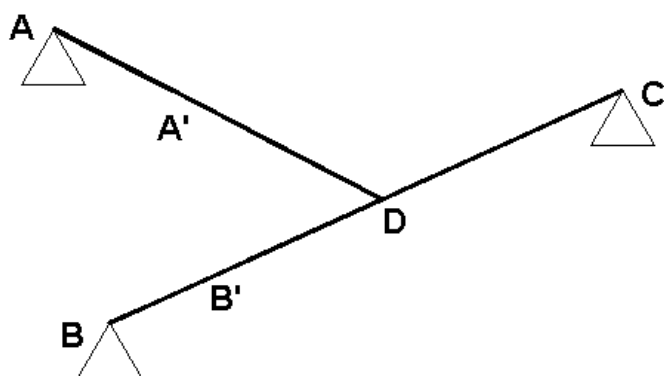
Trecho CD

Tabela dos Esforços Internos				
Trecho	Ponto	Cortante	Momento Fletor	Momento Torçor
A-A'	A			
	A'			
A-D	D			
B-B'	B			
	B'			
B-D	D			
C-D	C			
	D			

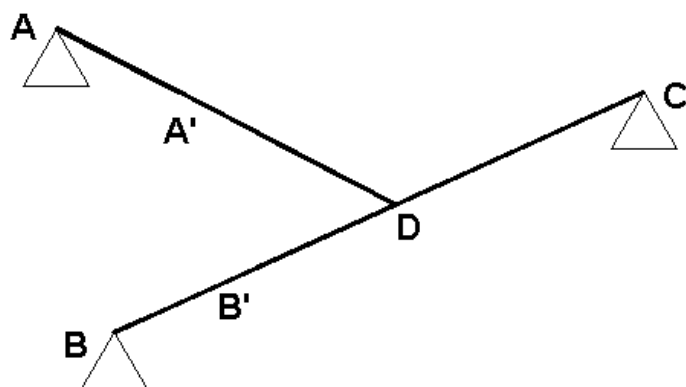
4° - Elaboração dos Diagramas dos Esforços Internos



DEC (kN)



DMF (kNm)



DMT (kNm)

Curso Análise de Estruturas - Hiperestática

CANAL O CALCULISTA



➤ **Módulo VII**
Estruturas Hiperestáticas

Módulo VII – Estruturas Hiperestáticas

7. As Estruturas Hiperestáticas

Neste módulo, iremos estudar as Estruturas Hiperestáticas, que são definidas como estruturas em que não é possível determinar os valores de suas incógnitas apenas usando as equações de equilíbrio da estática.

Em geral, as equações de equilíbrio fornecem condições necessárias mas não suficientes para a determinação dos esforços no modelo estrutural. Para determinar os esforços em estruturas hiperestáticas, é necessário o uso de outros métodos, o Método das Forças e o Método dos Deslocamentos.

Estudamos até agora as estruturas isostáticas, aprendemos a classificá-las, encontrar suas reações de apoio, e determinar seus esforços internos, isso nos dá bagagem para entendermos e analisarmos as estruturas hiperestáticas.

7.1- Condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações

As condições de compatibilidade podem ser divididas em dois grupos:

- Condições de compatibilidade externa: referem-se aos vínculos externos da estrutura e garantem que os deslocamentos e deformações sejam compatíveis com as hipóteses adotadas com respeito aos suportes ou ligações com outras estruturas;
- Condições de compatibilidade interna: garantem que a estrutura, ao se deformar, permaneça contínua no interior dos elementos estruturais (barras) e nas fronteiras entre os elementos estruturais, isto é, que as barras permaneçam ligadas pelos nós que as conectam (incluindo ligação por rotação no caso de não haver articulação entre as barras).

7.2 - Leis constitutivas dos materiais

Na teoria da elasticidade (Timoshenko & Goodier, 1980) estabelece que as relações da lei constitutiva são equações lineares com parâmetros constantes. Nesse caso, diz-se que o material trabalha em *regime elástico-linear*. O comportamento é considerado elástico quando, ao se descarregar a estrutura, o material não apresenta deformação residual alguma, isto é, ele retorna ao estado natural sem deformação. O comportamento é considerado *linear* quando existe proporcionalidade entre tensões e deformações.

Os exercícios desse curso são baseados em estruturas de materiais com comportamento elástico-linear.

7.3 - Métodos para análise de estruturas hiperestáticas

7.3.1 – Método das forças

Para uma solução correta na análise das estruturas, é necessário que as condições de equilíbrio, compatibilidade e leis constitutivas sejam satisfeitas simultaneamente.

No Método das Forças, as incógnitas principais da estrutura são forças e momentos, que podem ser as reações de apoio ou esforços internos. As outras incógnitas serão substituídas em equações de compatibilidade. Essas forças e momentos excedentes são chamados de *hiperestáticos*.

O número de *hiperestáticos* é igual ao número do grau de hiperestaticidade (G_h) da estrutura estudado no módulo I desse curso. (Reveja para lembrar).

A estrutura será dividida em sistemas, e o número de sistemas será igual ao número de *hiperestáticos* + 1. Sendo o sistema da estrutura isostática auxiliar chamado de *Sistema Principal* (SP).

Vamos explorar mais este método no módulo VIII.

7.3.1 – Método dos deslocamentos

No método dos deslocamentos, as incógnitas principais da estrutura são deslocamentos e rotações. Todas as outras incógnitas são expressas em termos das incógnitas principais escolhidas e substituídas em equações de equilíbrio, que depois são resolvidas.

Nesse método aborda a solução de maneira inversa ao método das forças. Primeiro são utilizadas as condições de compatibilidade, em seguida são consideradas as leis constitutivas dos materiais e finalmente, são utilizadas as condições de equilíbrio.

O número de incógnitas no método dos deslocamentos é igual ao número de incógnitas excedentes nas equações de compatibilidade.

Vamos explorar mais este método no módulo IX.

7.4– Princípio dos trabalhos virtuais (PTV)

Nesta aula vamos conhecer o princípio dos trabalhos virtuais e aprender a calcular o deslocamento de um determinado ponto em uma estrutura.

A dedução das soluções básicas, *método das forças e método dos deslocamentos*, é feita com base no princípio dos trabalhos virtuais, através de duas formulações – *princípio das forças virtuais e princípio dos deslocamentos virtuais*.

Esse PTV se baseia no *princípio da conservação de energia*, onde o trabalho mecânico realizado pelas cargas aplicadas em uma estrutura é igual à energia de deformação interna

armazenada na estrutura. De acordo com que essas cargas são removidas lentamente, o trabalho mecânico vai ser recomposto, como ocorre na compressão e descompressão de uma mola.

O PTV pode ser dividido em *Princípio das Forças Virtuais (PFV)*, onde se escolhe um sistema de forças, denominado virtual, do qual se saiba que satisfaz a equação para impor condições de compatibilidade a uma configuração deformada qualquer e o *Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV)*, onde se escolhe uma configuração deformada, denominada virtual, da qual se saiba que satisfaz as condições de compatibilidade.

7.4.1 – Princípio das Forças Virtuais

O princípio das forças virtuais (PFV) é uma das principais ferramentas para determinação de deslocamentos em estruturas. Martha (2010), apresenta esse princípio como:

Dada uma configuração deformada real e um sistema de forças arbitrário (virtual) em equilíbrio, a igualdade entre o trabalho realizado pelas forças externas (W_E) é igual a energia de deformação elástica total armazenada na estrutura (U), estabelece uma condição de compatibilidade para a configuração deformada real.

$$W_E = U$$

Sendo que:

$\overline{W}_E = \sum \bar{F} \cdot D \rightarrow$ trabalho das forças externas virtuais ($\bar{F}$) com os correspondentes deslocamentos externos reais (D);

$\bar{U} = \int \bar{\sigma} \cdot \varepsilon \rightarrow$ energia de deformação interna virtual armazenada em uma estrutura, combinando as tensões internas virtuais ($\bar{\sigma}$) com as correspondentes deformações internas reais (ε); ou

$\bar{U} = \int \bar{f} \cdot d \rightarrow$ energia de deformação interna virtual armazenada em uma estrutura, combinando os esforços internos virtuais ($\bar{f}$) com as correspondentes deformações relativos internos reais (d).

O PFV **a sobreposição** de efeitos, utilizando um sistema principal, chamado *sistema real* e um sistema auxiliar, chamado *sistema virtual*.

O sistema virtual trabalha com a mesma estrutura, mas com cargas diferentes. Essas cargas são compostas de uma força (ou momento), escolhidas na direção do deslocamento (ou rotação) que se deseja calcular e de suas reações de apoio. As cargas são chamadas *cargas virtuais* pois não existem na realidade, são apenas para efeito do cálculo.

A aplicação do PFV para o cálculo de deslocamentos em estruturas que trabalham à flexão resulta no cálculo de uma integral que combina diagramas de momentos.

A expressão geral do PFV para cálculo de um deslocamento genérico devido a solicitações externas em um pórtico plano:

$$\Delta = \frac{1}{\bar{P}} \left[\int \bar{N} \cdot du + \int \bar{M} \cdot d\theta + \int \bar{Q} \cdot dh \right]$$

Sendo,

Deslocamento axial relativo interno provocado por esfoço normal:

$$du = \frac{N}{EA} dx$$

Rotação relativa interna provocada por momento fletor

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx$$

Delocamento transversoal relativo interno provocado por esfoço cortante:

$$dh = \chi \frac{Q}{GA} dx$$

Temos,

$$\Delta = \frac{1}{\bar{P}} \left[\int \frac{\bar{N} \cdot N}{EA} dx + \int \frac{\bar{M} \cdot M}{EI} dx + \int \chi \frac{\bar{Q} \cdot Q}{GA} dx \right]$$

Obs.: No caso de grelhas é substituído a parçelo do esfoço Normal pela parçela referente ao Momento Torçor ($\bar{T}$) e a rotação relativa interna por torção no sistema real ($d\phi$) ficando a fórmula:

$$\Delta = \frac{1}{\bar{P}} \left[\int \frac{\bar{T} \cdot T}{GJ_t} dx + \int \frac{\bar{M} \cdot M}{EI} dx + \int \chi \frac{\bar{Q} \cdot Q}{GA} dx \right]$$

Aplicando o PFV para cálculo de deslocamentos em estruturas que trabalham à flexão resulta no cálculo de uma integral que combina diagramas de momento fletores nos sistemas real e virtual. A tabela de Kurt Beyer, mostrada a seguir apresenta expressões para avaliar essa integral para diagramas usuais em uma barra com rigidez à flexão EI constante ao longo do seu comprimento.

TABELA DE KURT BEYER

VALORES DAS INTEGRAIS $\int M \bar{M} dx$ PARA RETAS DE COMPRIMENTO L E INÉRCIA CONSTANTE $L' = L \frac{EI_C}{EI}$

M	$\bar{M}$	$\bar{M}$	$\bar{M}_B$	$\bar{M}_A$	$\bar{M}_B$	Parábola do 2º grau $\bar{M}_m$	Parábola do 2º grau $\bar{M}_B$	Parábola do 2º grau $\bar{M}_B$	$\bar{M}_B$
M	$L' M \bar{M}$	$\frac{1}{2} L' M \bar{M}_B$	$\frac{1}{2} L' M (\bar{M}_A + \bar{M}_B)$	$\frac{2}{3} L' M \bar{M}_m$	$\frac{2}{3} L' M \bar{M}_B$	$\frac{1}{3} L' M \bar{M}_B$	$\frac{1}{2} L' M \bar{M}$		
M_B	$\frac{1}{2} L' M_B \bar{M}$	$\frac{1}{3} L' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} L' M_B (\bar{M}_A + 2 \bar{M}_B)$	$\frac{1}{3} L' M_B \bar{M}_m$	$\frac{5}{12} L' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{4} L' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} L' (1 + \alpha/L) M_B \bar{M}$		
M_A	$\frac{1}{2} L' M_A \bar{M}$	$\frac{1}{6} L' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} L' M_A (2 \bar{M}_A + \bar{M}_B)$	$\frac{1}{3} L' M_A \bar{M}_m$	$\frac{1}{4} L' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} L' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} L' (1 + \beta/L) M_A \bar{M}$		
M_A	$\frac{1}{2} L' (M_A + M_B) \bar{M}$	$\frac{1}{6} L' (M_A + 2 M_B) \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} L' [\bar{M}_A (2 M_A + M_B) + \bar{M}_B (2 M_B + M_A)]$	$\frac{1}{3} L' (M_A + M_B) \bar{M}_m$	$\frac{1}{12} L' (3 M_A + 5 M_B) \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} L' (M_A + 3 M_B) \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} L' [\bar{M}_A (1 + \beta/L) + \bar{M}_B (1 + \alpha/L)]$		
Parábola do 2º grau M_m	$\frac{2}{3} L' M_m \bar{M}$	$\frac{1}{3} L' M_m \bar{M}_B$	$\frac{1}{3} L' M_m (\bar{M}_A + \bar{M}_B)$	$\frac{8}{15} L' M_m \bar{M}_m$	$\frac{7}{15} L' M_m \bar{M}_B$	$\frac{1}{5} L' M_m \bar{M}_B$	$\frac{1}{3} L' (1 + \alpha \beta/L^2) M_m \bar{M}$		
Parábola do 2º grau M_B	$\frac{2}{3} L' M_B \bar{M}$	$\frac{5}{12} L' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} L' M_B (3 \bar{M}_A + 5 \bar{M}_B)$	$\frac{7}{15} L' M_B \bar{M}_m$	$\frac{8}{15} L' M_B \bar{M}_B$	$\frac{3}{10} L' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} L' [5 - \beta/L - (\alpha/L)^2] M_B \bar{M}$		
Parábola do 2º grau M_A	$\frac{2}{3} L' M_A \bar{M}$	$\frac{1}{4} L' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} L' M_A (5 \bar{M}_A + 3 \bar{M}_B)$	$\frac{7}{15} L' M_A \bar{M}_m$	$\frac{11}{30} L' M_A \bar{M}_B$	$\frac{2}{15} L' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} L' [5 - \alpha/L - (\beta/L)^2] M_A \bar{M}$		
Parábola do 2º grau M_B	$\frac{1}{3} L' M_B \bar{M}$	$\frac{1}{4} L' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} L' M_B (\bar{M}_A + 3 \bar{M}_B)$	$\frac{1}{5} L' M_B \bar{M}_m$	$\frac{3}{10} L' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{5} L' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} L' [1 - \alpha/L - (\alpha/L)^2] M_B \bar{M}$		
Parábola do 2º grau M_A	$\frac{1}{3} L' M_A \bar{M}$	$\frac{1}{12} L' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} L' M_A (3 \bar{M}_A + \bar{M}_B)$	$\frac{1}{5} L' M_A \bar{M}_m$	$\frac{2}{15} L' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{30} L' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} L' [1 - \beta/L - (\beta/L)^2] M_A \bar{M}$		
M	$\frac{1}{2} L' M \bar{M}$	$\frac{1}{6} L' (1 + \alpha/L) \bar{M}_B M$	$\frac{1}{6} L' M [(1 + \beta/L) \bar{M}_A + (1 + \alpha/L) \bar{M}_B]$	$\frac{1}{3} L' (1 + \alpha \beta/L^2) M \bar{M}_m$	$\frac{1}{12} L' [5 - \beta/L - (\beta/L)^2] M \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} L' [5 - \alpha/L - (\alpha/L)^2] M \bar{M}_B$	$\frac{1}{3} L' M \bar{M}$		

Esta tabela será utilizada para determinar deslocamentos ou rotações nas direções de vínculos eliminados de estruturas hiperestáticas utilizando o Método das Forças apresentado no Módulo 8.

7.4.2 – Princípio dos Deslocamentos Virtuais

O princípio dos deslocamentos virtuais (PDV) é uma das principais ferramentas para a determinação de forças (e momentos) necessárias para impor uma determinada configuração deformada compatível com uma estrutura. Esse princípio diz que:

- Dado um sistema de forças real e uma configuração deformada arbitrária (virtual) compatível, a igualdade $\overline{W}_E = \bar{U}$ estabelece uma condição de equilíbrio para o sistema de forças real.

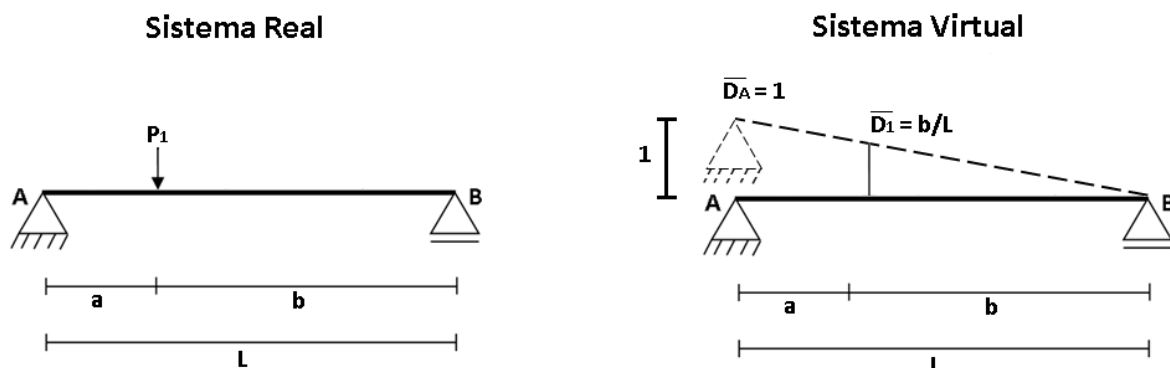
Sendo que:

$\overline{W}_E = \sum F \cdot \bar{D} \rightarrow$ trabalho das forças externas reais (F) com os correspondentes deslocamentos externos virtuais ($\bar{D}$);

$\bar{U} = \int \sigma \cdot \bar{\varepsilon} \rightarrow$ energia de deformação interna virtual armazenada em uma estrutura, combinando as tensões internas reais (σ) com as correspondentes deformações internas virtuais ($\bar{\varepsilon}$); ou

$\bar{U} = \int f \cdot \bar{d} \rightarrow$ energia de deformação interna virtual armazenada em uma estrutura, combinando os esforços internos reais (f) com as correspondentes deformações relativos internos virtuais ($\bar{d}$).

O Princípio dos Deslocamentos Virtuais também utiliza o sistema principal e um sistema auxiliar virtual, como no PFV. O sistema virtual trabalha com a mesma estrutura, porém com uma configuração deformada escolhida de tal maneira que a única força (ou momento) desconhecida (a que se deseja calcular) produza trabalho externo. Essa configuração virtual não existe na realidade, é apenas para o cálculo. (Martha, 2010).



O PDV também pode ser utilizado para determinar um esforço interno em uma estrutura. Para tanto, é necessário escolher uma configuração deformada virtual que isole, na equação $\bar{W}_E = \bar{U}$, o esforço que se quer calcular.

A grande vantagem do PDV é a determinação de forças ou momentos, externos e internos, que equilibram uma estrutura qualquer (isostática ou hiperestática) que tenha uma configuração deformada conhecida (não rígida, no caso geral).

A expressão geral do PDV para o cálculo de uma força externa genérica atuando em um ponto de um pórtico plano para manter seu equilíbrio é apresentada a seguir, sendo desprezada a energia de deformação por efeito cortante.

$$\bar{W}_E = \bar{U} \rightarrow P = \frac{1}{\bar{\Delta}} \left[\int \bar{N} \cdot du + \int \bar{M} \cdot d\theta \right]$$

Sendo,

Deslocamento axial relativo interno provocado por esforço normal:

$$du = \frac{N}{EA} dx$$

Rotação relativa interna provocada por momento fletor

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx$$

$$P = \frac{1}{\bar{\Delta}} \left[\int \frac{\bar{N} \cdot N}{EA} dx + \int \frac{\bar{M} \cdot M}{EI} dx \right]$$

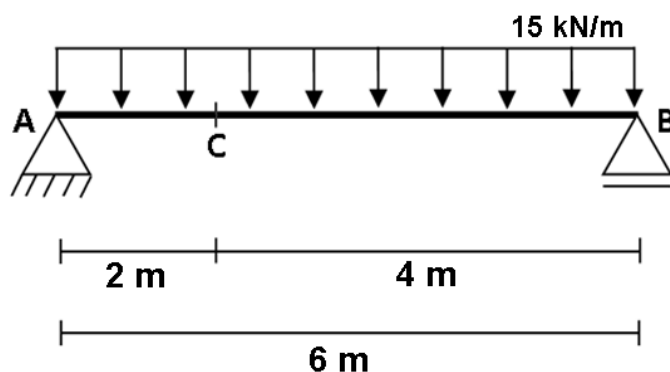
Obs.: No caso de grelhas é substituído a parcela do esforço Normal pela parcela referente ao Momento Torçor ($\bar{T}$) e a rotação relativa interna por torção no sistema real ($d\phi$) ficando a fórmula:

$$P = \frac{1}{\bar{\Delta}} \left[\int \frac{\bar{T} \cdot T}{GJ_t} dx + \int \frac{\bar{M} \cdot M}{EI} dx \right]$$

Estudaremos mais a fundo esse princípio no Módulo 9 – Método dos Deslocamentos.

7.5 Exercícios

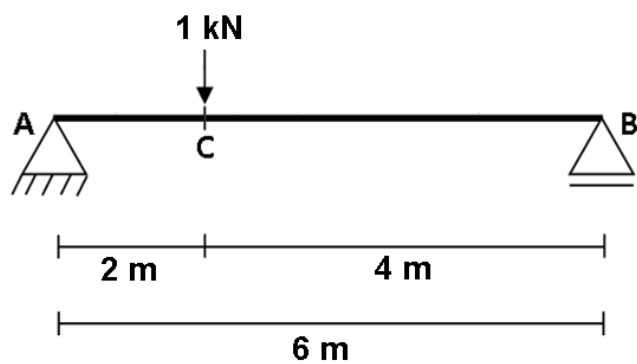
1) Calcule o deslocamento vertical do Ponto C da viga a seguir, desprezando-se o efeito das deformações devidas à força cortante e axiais. $EI = 200000 \text{ kNm}^2$ (constante).



1º Passo - Calcular as reações de apoio:

2º Passo – Elaborar o Diagrama de Momento Fletor

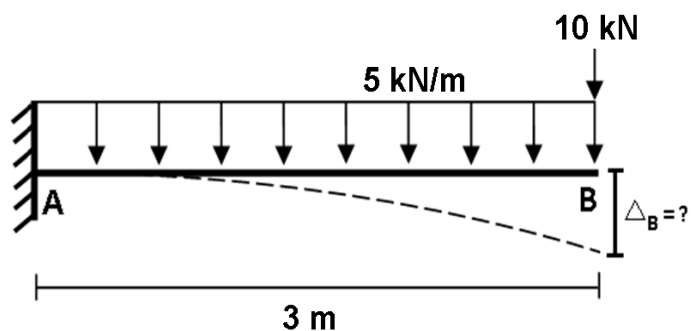
3º Passo – Calcular as reações de apoio com o Carregamento Unitário.



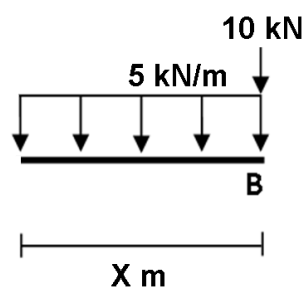
4º Passo – Elaborar o Diagrama de Momento Fletor do Carregamento Unitário.

5º Passo – Usar a tabela de Kurt Beyer para encontrar o deslocamento.

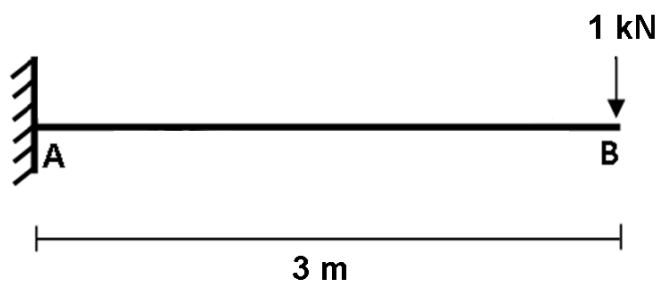
2) Calcule o deslocamento vertical do Ponto B da estrutura, desprezando-se o efeito das deformações devidas à força cortante. $EI = 2 \times 10^5 \text{ kNm}^2$ (constante).

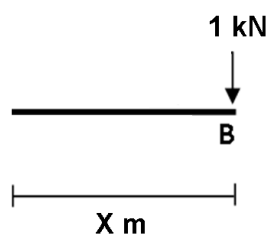


1º Passo – Encontrar a Equação do Momento em relação a X:



2º Passo – Encontrar a Equação do Momento para um Carregamento Unitário em relação a X:





3º Passo – Calcular o deslocamento no ponto usando a integral:

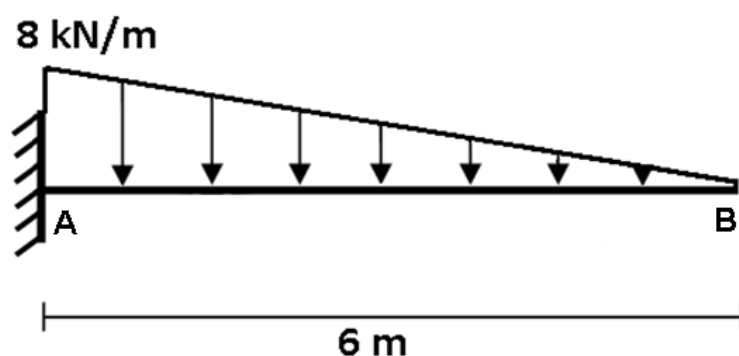
$$\Delta = \frac{1}{\bar{P}} \left[\int \frac{\bar{N} \cdot N}{EA} dx + \int \frac{\bar{M} \cdot M}{EI} dx + \int x \frac{\bar{Q} \cdot Q}{GA} dx \right]$$

3) Na viga do exercício anterior, calcular a rotação da seção B, desprezando-se o efeito das deformações devidas à força cortante.

Fórmula:

$$\theta_b = \int \frac{M}{EI} dx$$

4) Calcule o deslocamento horizontal e a inclinação no ponto B da viga a seguir, desprezando as influências das deformações axiais e da força cortante. $EI = 2,0 \times 10^5 \text{ kNm}^2$ (constante).



1º Passo – Calcule as reações de apoio

2º Passo – Encontre a Equação $Q(x)$.

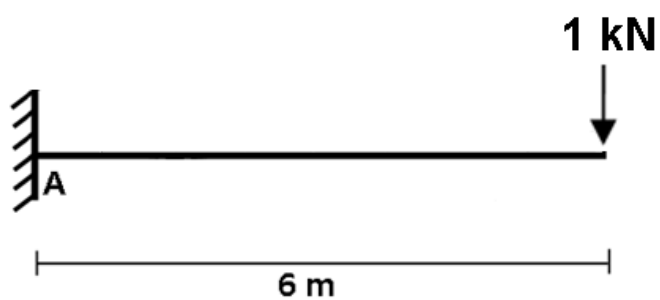
3º Passo – Encontre a Equação da Cortante.

$$V(x) = - \int Q(x) dx$$

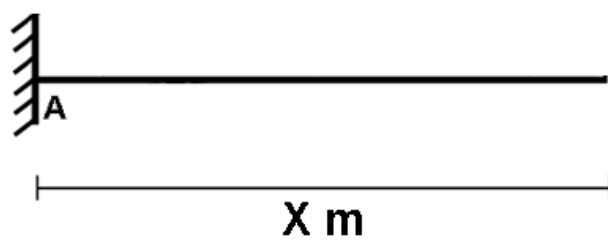
4º Passo – Encontre a Equação do Momento.

$$M(x) = \int V(x) dx$$

5º Passo – Calcule as reações de apoio da carga unitária.



6º Passo – Determine a Equação do Momento da Carga Unitária.



7º Passo – Tabela de Equações de Momento

Trecho	Comprimento (L)(m)	Equação do Momento (kNm)	Equação do Momento (Unitário) (kNm)
AB			

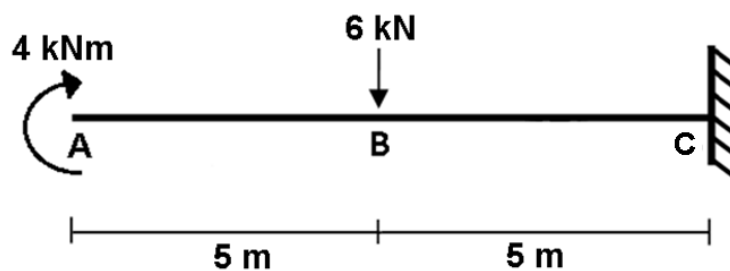
8º Passo – Calcule a Integral.

$$\delta_b = \int \frac{M\bar{M}}{EI}$$

9º Passo – Calcule a rotação no Ponto B pela integral:

$$\theta_b = \int_0^6 \frac{M}{EI} dx$$

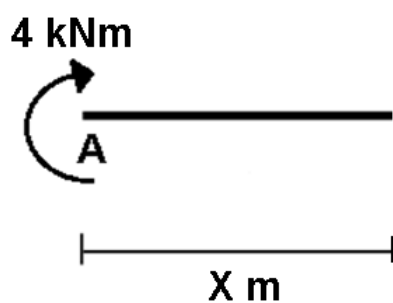
5) Calcule o deslocamento horizontal no ponto A da viga a seguir, desprezando as influências das deformações axiais e da força cortante. $EI = 1,5 \times 10^5 \text{ kNm}^2$ (constante).

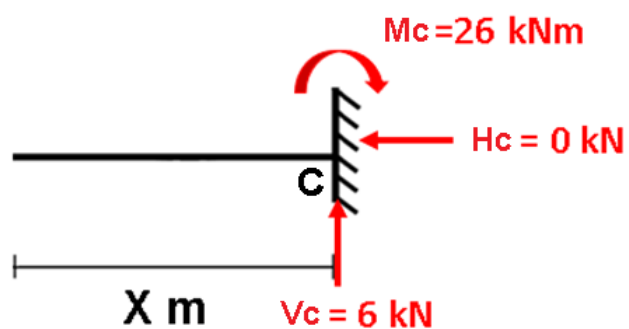


1º Passo – Calcule as reações de apoio

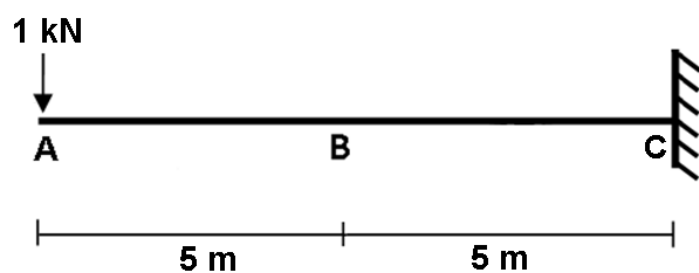
2º Passo – Encontre a Equação do Momento do trecho AB em relação a X.

Trecho AB



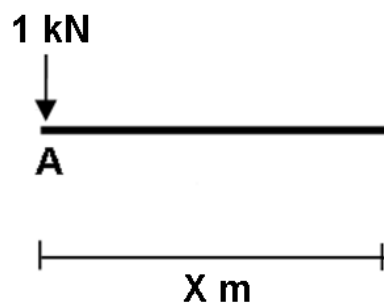
Trecho BC

3º Passo – Calcule as reações de apoio com Carregamento Unitário.

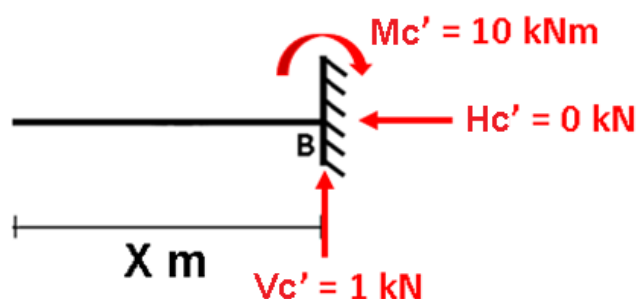


4º Passo – Equações do Momento dos trechos AB e BC em relação ao Carregamento Unitário.

Trecho AB



Trecho BC



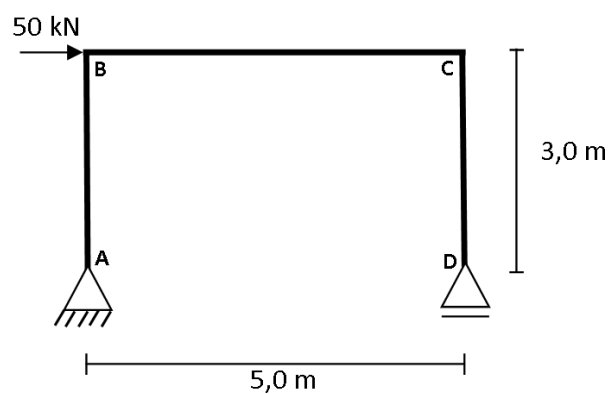
5º Passo – Tabela das Equações de Momento:

Trecho	Comprimento (L)(m)	Equação do Momento (kNm)	Equação do Momento (Unitário) (kNm)
AB			
BC			

6º Passo – Resolver a Integral igualando os momentos com os respectivos trechos.

$$\delta_d = \int \frac{M\bar{M}}{EI}$$

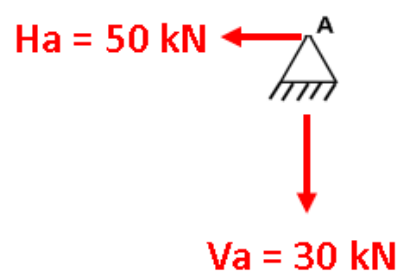
6) Calcule o deslocamento horizontal no Ponto D do pórtico abaixo, desprezando as influências das deformações axiais e da força cortante.. $EI = 2,0 \times 10^5 \text{ kNm}^2$ (constante).



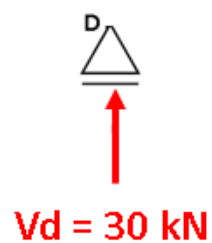
1º Passo – Calcular as reações de apoio.

2º Passo – Elaborar o Diagrama de Momento Fletor.

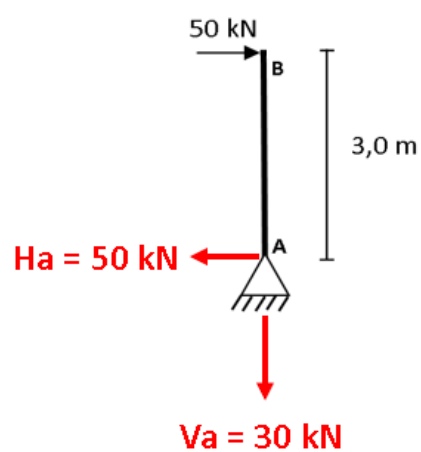
Ponto A



Ponto D



Ponto B



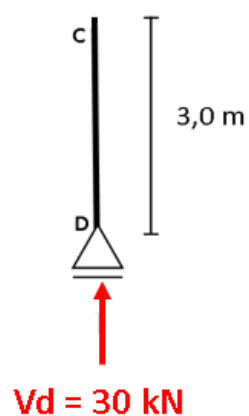
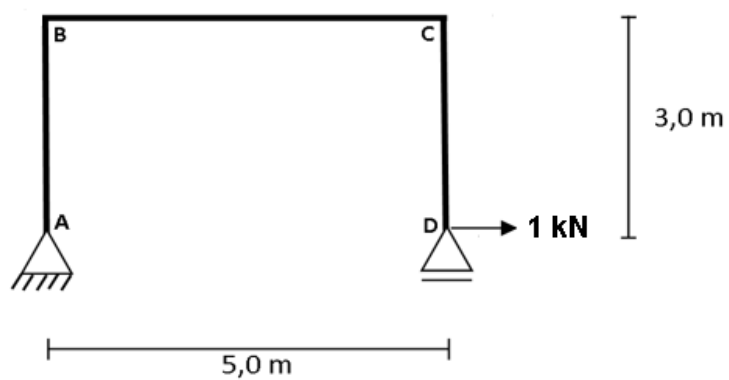
Ponto C

Diagrama de Momento Fletor

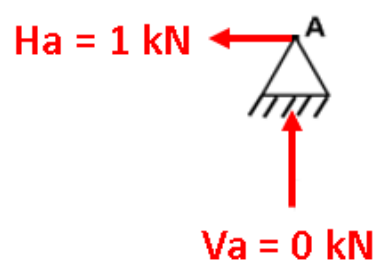


3º Passo – Calcular as reações de apoio com carregamento unitário.

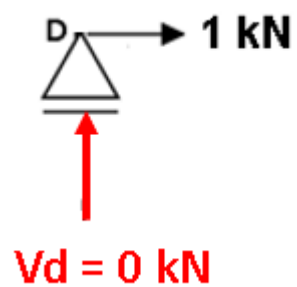


4º Passo – Elaborar o Diagrama de Momento Fletor.

Ponto A



Ponto D



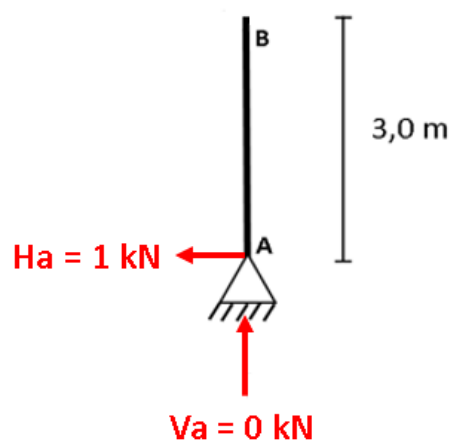
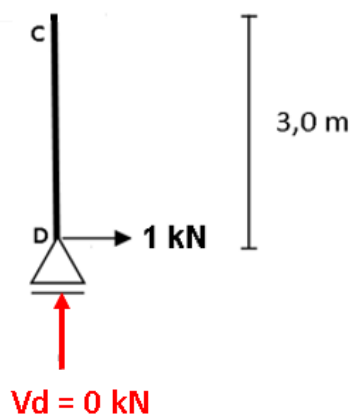
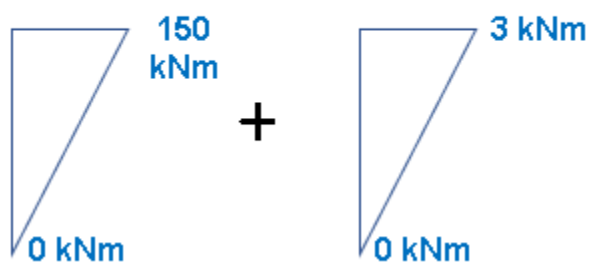
Ponto BPonto C

Diagrama de Momento Fletor

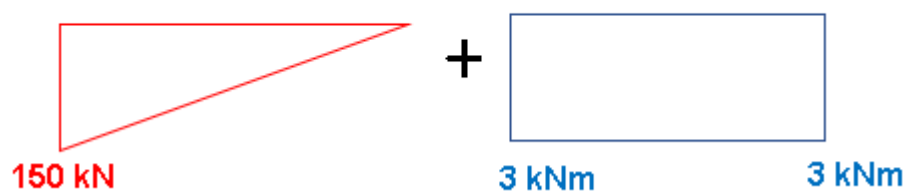


5º Passo – Usar a Tabela de Kurt Beyer para encontrar o deslocamento.

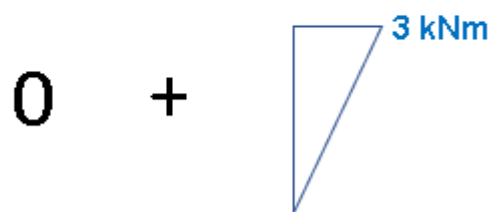
Barra AB



Barra BC

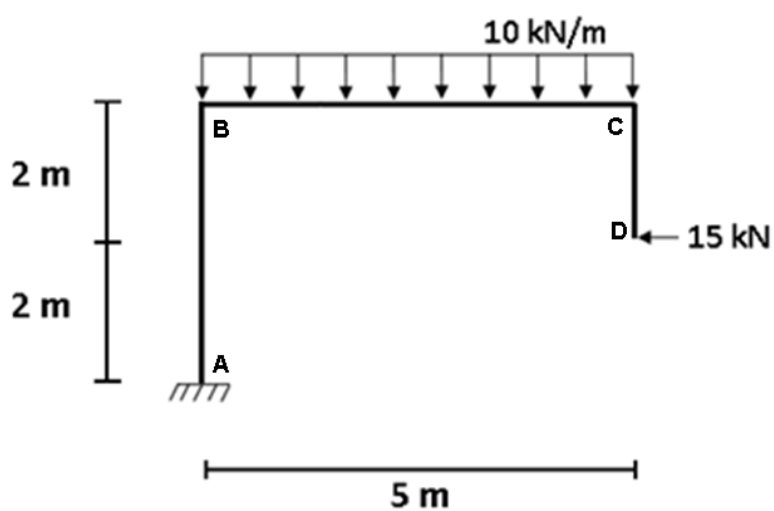


Barra BC



6º Passo – Fazer a soma e dividir por EI

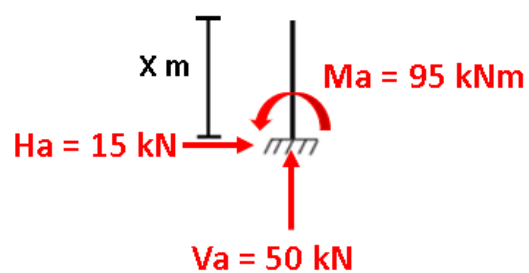
- 7) Calcule o deslocamento vertical horizontal do Ponto B do pórtico a seguir, desprezando as influências das deformações axiais e da força cortante. Considere $EI = 1,5 \times 10^5 \text{ kNm}^2$



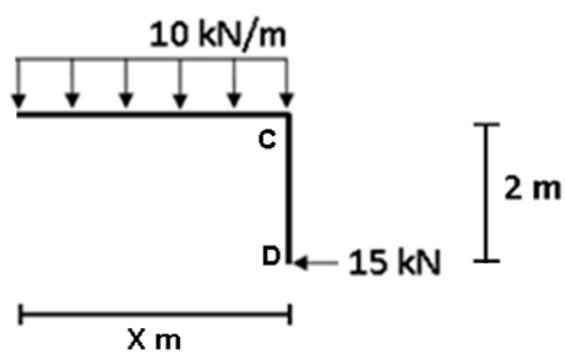
1º Passo – Calcule as reações de apoio.

2º Passo – Encontre as Equações de Momento em cada trecho.

Trecho AB



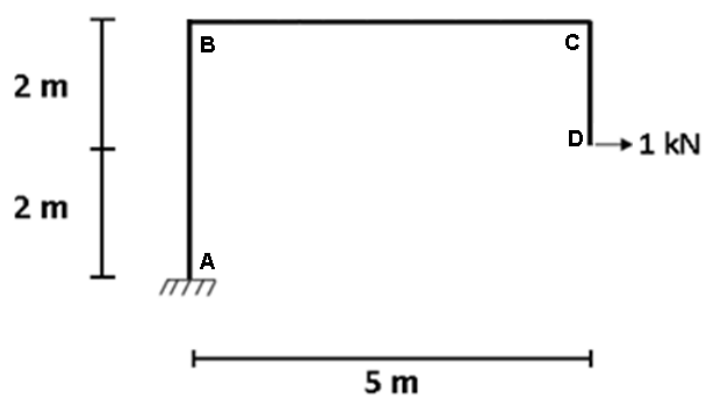
Trecho BC



Trecho CD

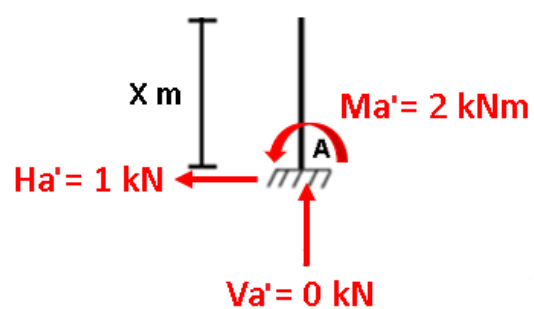


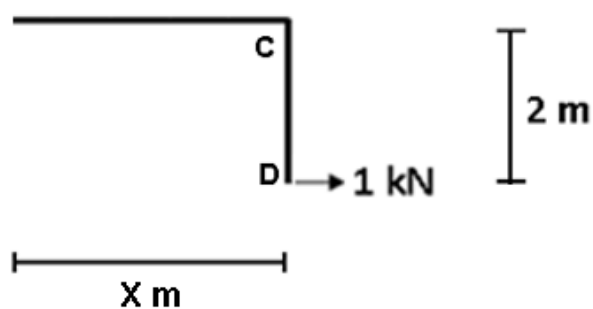
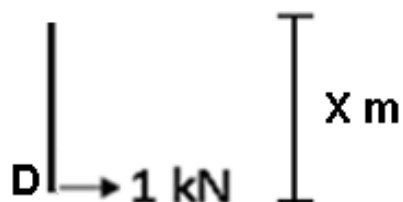
3º Passo – Calcule as reações de apoio com o Carregamento Unitário.



4º Passo – Encontre as Equações de Momento em cada trecho.

Trecho AB'



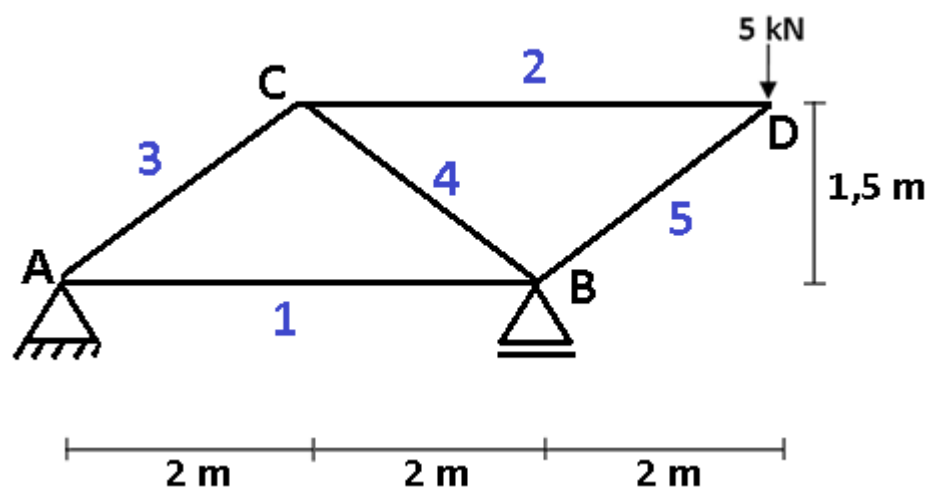
Trecho BC'Trecho CD'5º Passo – Tabela de Equações de Momento

Trecho	Comprimento (L)(m)	Equação do Momento (kNm)	Equação do Momento (Unitário) (kNm)
AB			
BC			
CD			

6º Passo – Determinar o deslocamento resolvendo a integral:

$$\delta_d = \int \frac{M\bar{M}}{EI}$$

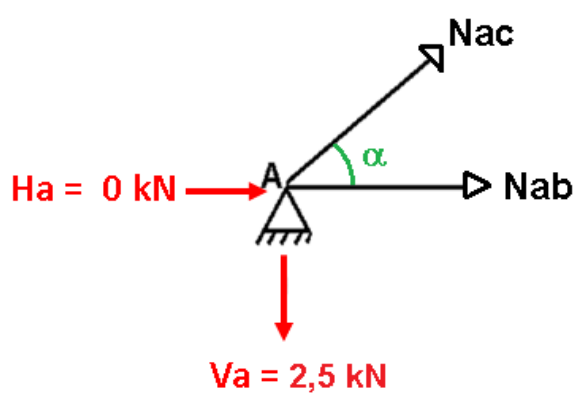
- 8) Calcule o deslocamento vertical do Nó D da treliça vista na figura abaixo Considere os nós como rótulas perfeitas e as barras com inércia $EA = 16000 \text{ kN}$.



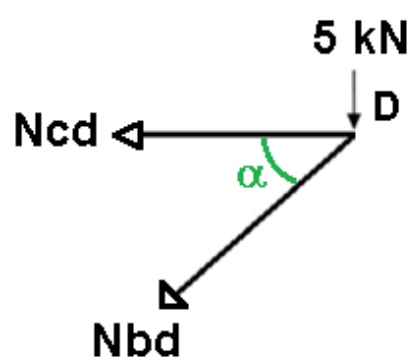
1º Passo – Calcule as reações de apoio da treliça.

2º Passo – Determine o valor do Esforço Normal em cada barra.

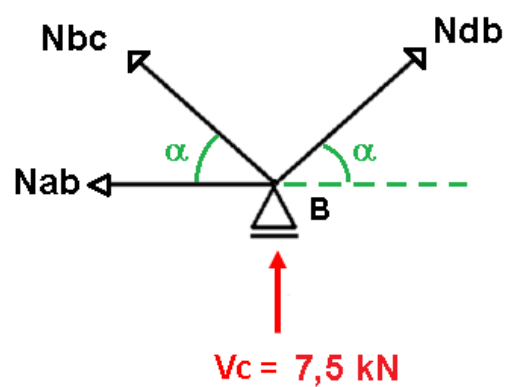
Nó A



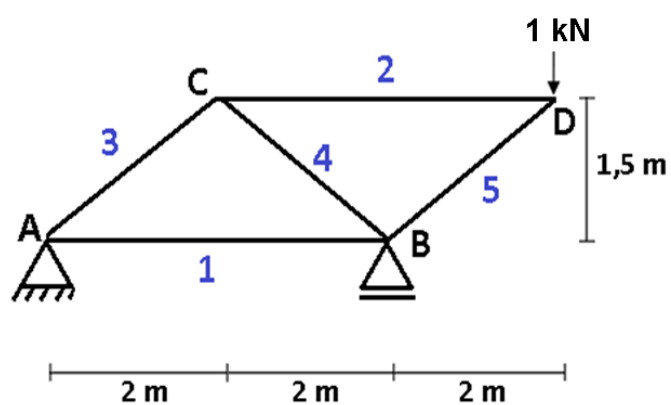
Nó D



Nó B

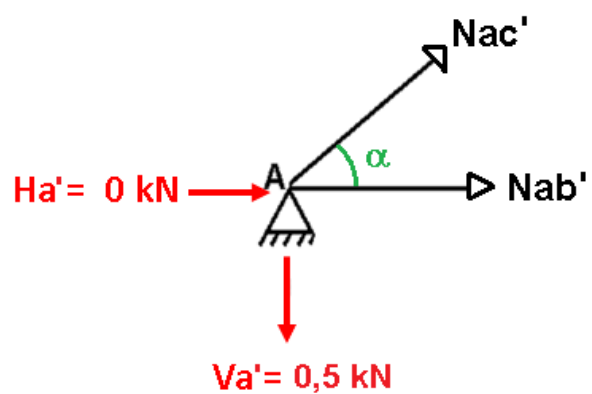


3º Passo – Calcule as reações de apoio com o carregamento unitário

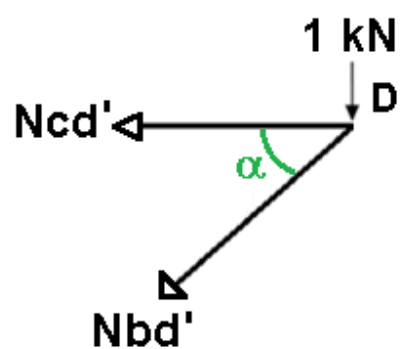


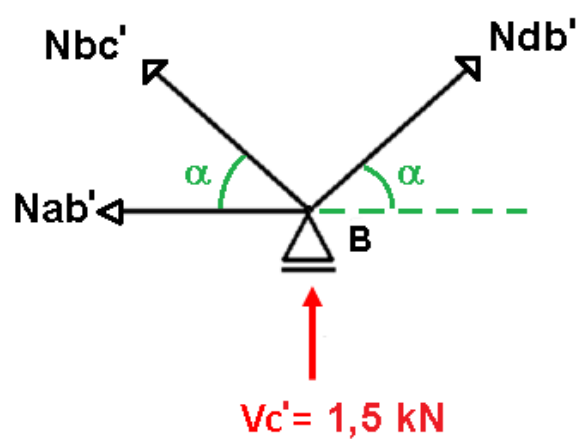
4º Passo – Determine o valor do Esforço Normal em cada barra.

Nó A'



Nó D'



Nó B'

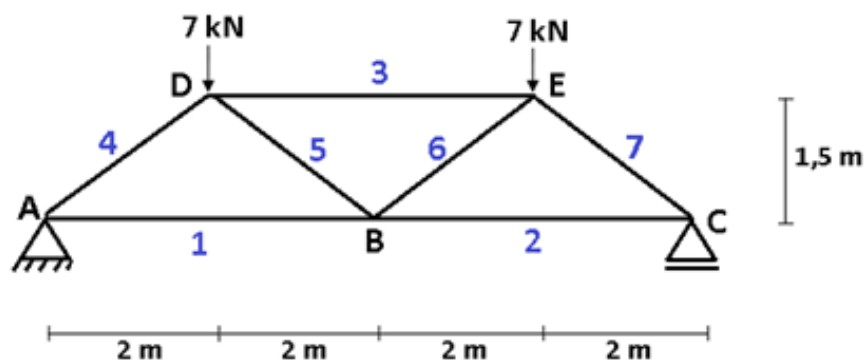
5º Passo – Tabela dos Esforços de cada barra

Barra	Nó Inicial	Nó Final	N	$\bar{N}$	L	$N\bar{N}L$
1	A	B				
2	C	D				
3	A	C				
4	C	B				
5	B	D				

6º Passo – Encontrar o deslocamento resolvendo a integral:

$$\delta_D = \frac{1}{EA} \sum N \bar{N} L$$

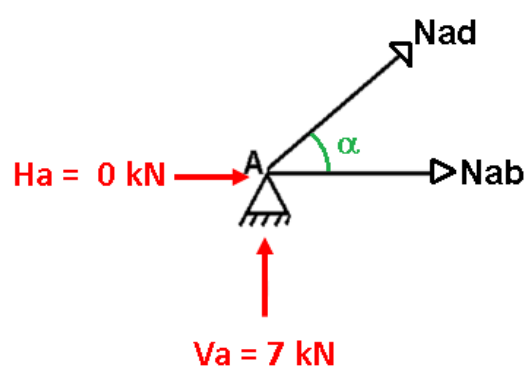
9) Calcule o deslocamento vertical do Nó D da treliça vista na figura abaixo Considere os nós como rótulas perfeitas e as barras com inércia $EA = 25000 \text{ kN}$.



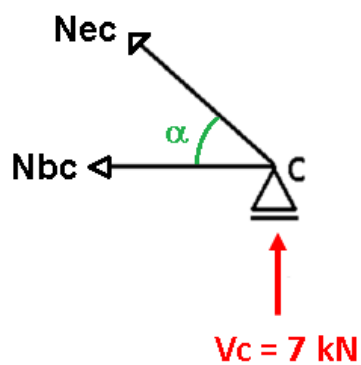
1º Passo – Calcule as reações de apoio da treliça.

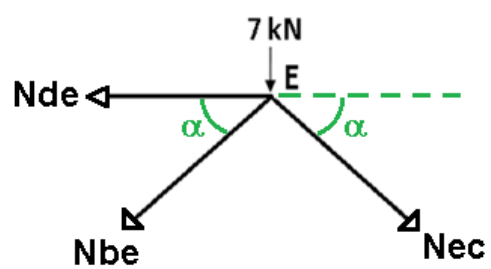
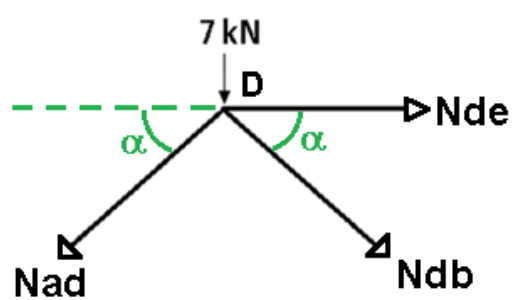
2º Passo – Determine o valor do Esforço Normal em cada barra.

Nó A

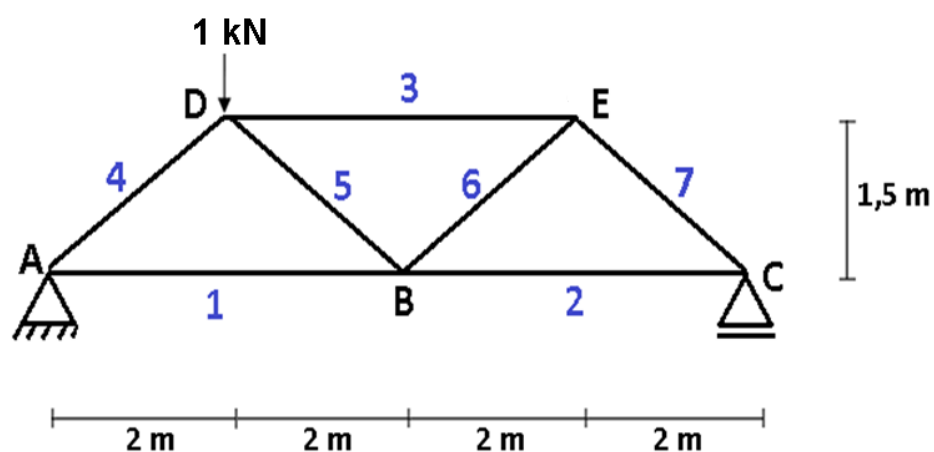


Nó C



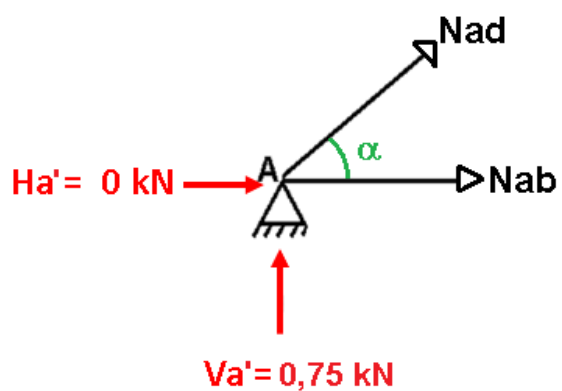
Nó ENó D

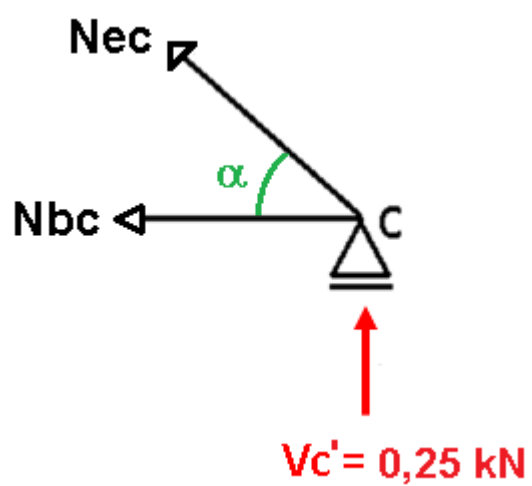
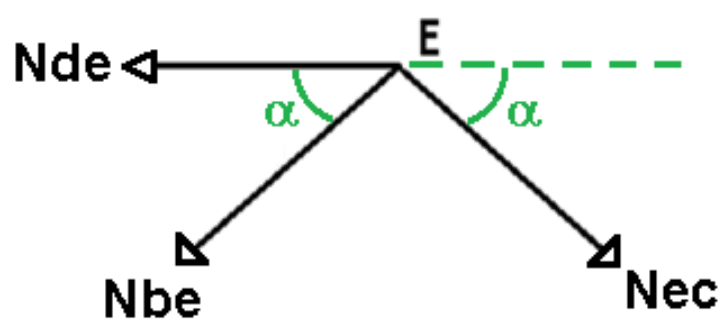
3º Passo – Calcule as reações de apoio com o carregamento unitário

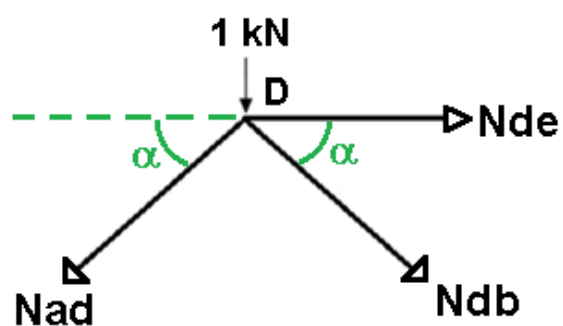


4º Passo – Determine o valor do Esforço Normal em cada barra.

Nó A'



Nó C'Nó E'

Nó D

5º Passo – Tabela dos Esforços de cada barra

Barra	Nó Inicial	Nó Final	N	$\bar{N}$	L	$N\bar{N}L$
1	A	B				
2	B	C				
3	D	E				
4	A	D				
5	D	B				
6	B	E				
7	E	C				

6º Passo – Encontrar o descolamento resolvendo a integral:

$$\delta_D = \frac{1}{EA} \sum N \bar{N} L$$

Curso Análise de Estruturas - Hiperestática**CANAL O CALCULISTA**

➤ **Módulo VIII**
Método das Forças

Módulo VIII – Método das Forças

8. Método das Forças

Neste módulo vamos aprender a resolver estruturas hiperestáticas utilizando o *Método das Forças*.

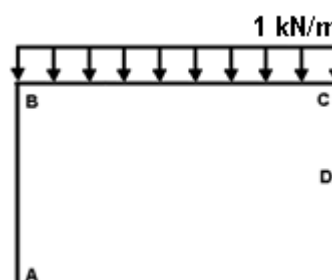
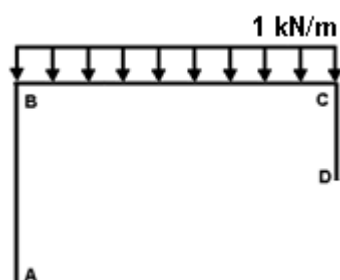
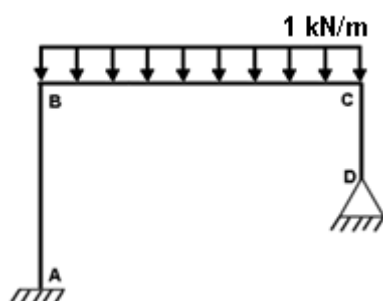
O Método das Forças é um dos métodos clássicos para análise de estruturas hiperestáticas, ele é chamado assim porque as incógnitas são forças (ou momentos), mas também é conhecido como método da compatibilidade ou método da flexibilidade. Sua metodologia se baseia em “Somar uma série de soluções básicas que satisfazem as condições de equilíbrio mas não satisfazem as condições de compatibilidade da estrutura original, para, na superposição, restabelecer as condições de compatibilidade”, Martha 2010.

Na prática, dividiremos a estrutura em um Sistema Principal (SP) e Sistemas Auxiliares. O Sistema Principal é composto por uma estrutura isostática, as forças e momentos associados aos vínculos liberados são as incógnitas do problema, chamados de *hiperestáticos*. O número de vínculos a serem eliminados é igual ao grau de hiperestaticidade, G_h , aprendidos no módulo I deste curso. A escolha do Sistema Principal é livre, qualquer estrutura isostática pode ser escolhida, desde que seja estável estaticamente. O número total de sistemas é sempre igual ao grau de hiperestaticidade (G_h) mais um ($G_h + 1$).

Os esforços associados aos vínculos eliminados são as reações de apoio X_i onde i é o índice que varia de 1 ao n° de G_h .

Exemplo:

Determine opções para a seguinte estrutura:



8.1 Matriz de flexibilidade e vetor dos termos de carga

Para determinar os valores de X_i correspondentes, é feita a superposição de casos básicos, utilizando o SP como estrutura para as soluções básicas para restabelecer as condições de compatibilidade, para isso utilizaremos a matriz de flexibilidade apresentada a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} x \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resultando no sistema:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases}$$

Esses termos e coeficientes correspondem a deslocamentos ou rotações nas direções dos vínculos eliminados do sistema principal adotado, para determiná-los usaremos o Princípio das Forças Virtuais (PFV), estudadas no módulo 7.

8.2 Determinação dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade

Nos exercícios de PFV, nós usamos um sistema real de deformação e um sistema de forças virtuais, com uma carga virtual generalizada aplicada sobre o ponto e na direção do deslocamento ou rotação que queríamos calcular. No método das forças para determinarmos os termos de carga δ_{i0} , o sistema real de deformação é o caso (0), no qual tem os valores dos hiperestáticos igual a zero. Já no sistema de forças virtuais varia de acordo com o termo de carga que se deseja determinar.

Por exemplo, para encontrar o termo δ_{10} é a combinação do caso virtual (1) com o caso real (0), para o termo δ_{21} é a combinação do caso virtual (2) com o caso virtual (1), e assim sucessivamente.

A equação que expressa o cálculo de um deslocamento ou rotação em um ponto de um pórtico plano pelo PFV, a expressão geral para o termo da carga δ_{i0} e coeficientes de flexibilidades δ_{ij} é:

$$\delta_{ij} = \int \frac{N_i \cdot N_j}{EA} dx + \int \frac{M_i \cdot M_j}{EI} dx + \int \chi \frac{Q_i \cdot Q_j}{EA} dx$$

Onde,

N = diagrama dos esforços normais;

M = diagrama dos momentos fletores;

Q = diagrama dos esforços cortantes;

E = módulo de elasticidade do material;

G = é o módulo de cisalhamento do material;

A = área da seção transversal;

I = momento de inércia da seção transversal

χ = fator de forma da seção transversal que define a área efetiva para cisalhamento.

O termo de carga é encontrado sempre que o $j = 0$, e os coeficientes de flexibilidade forem $j \neq 0$.

A última integral da equação, da energia de deformação por cisalhamento, é geralmente desprezada na presença das outras integrais para o caso, muito usual, de barras não curtas – com comprimento de vão bem maior que a altura da seção transversal.

Nas treliças, só existem esforços internos normais e constantes em cada barra como já estudamos no módulo 5. Para treliças com barras com seção transversal constante (barras prismáticas), a expressão para o termo de carga e coeficientes de flexibilidade pode ser reduzida em:

$$\delta_{ij} = \int \frac{N_i \cdot N_j}{EA} dx = \sum \left[\frac{N_i \cdot N_j \cdot l}{EA} \right]$$

Onde,

l é o comprimento da barra.

Em grelhas, não existe o termo da energia de deformação axial e há um termo para a energia de deformação por torção. A expressão para o termo de carga e os coeficientes de flexibilidades em grelhas, desprezando a energia de deformação por cisalhamento é:

$$\delta_{ij} = \int \frac{M_i \cdot M_j}{EI} dx + \int \frac{T_i \cdot T_j}{GJ_t} dx$$

Onde,

T = diagrama de momento torçor;

G = é o módulo de cisalhamento do material;

J = momento de inércia à torção da seção transversal.

Após a determinação de todos os termos de carga e coeficientes de flexibilidades, deve ser aplicado os resultados obtidos na matriz de flexibilidade, item 8.1 deste módulo, e resolvido o sistema.

A solução da estrutura não termina na obtenção dos valores dos hiperestáticos X_i , é necessário obter os diagramas de esforços internos e dos deslocamentos da estrutura, calculando

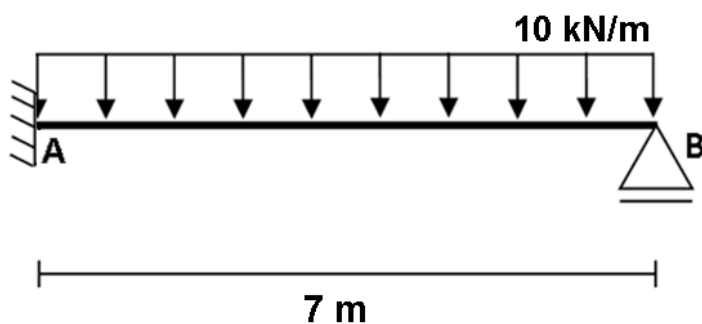
ou utilizando os valores de X_i como esforços se fossem forças ou momentos na estrutura, ou utilizando a própria superposição de casos básicos para a obtenção dos esforços internos (ou deslocamentos) finais.

Nos exercícios deste curso utilizaremos a tabela de Kurt Beyer para a compatibilidade dos esforços, essa é a metodologia mais aplicada no ensino da hiperestática nas universidades do Brasil e a mais pedida entre os alunos.

Vamos aos exercícios, pois é praticando que se aprende.

Exercícios:

1) Determine os valores das Reações de Apoio da Estrutura Hiperestática a seguir, usando a tabela de Kurt Beyer. Considere $EI = 25000 \text{ kNm}^2$



Resolução

- 1) Determine o Grau de Hiperestaticidade;

- 2) Determine o Sistema Principal (S_0), e o(s) sistema(s) virtual(ais);

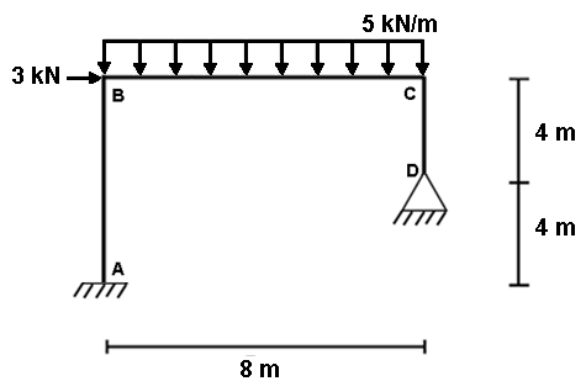
3) Elabore o Diagrama de Momento Fletor de cada Sistema (use uma folha extra para os cálculos);

4) Determine os valores de δ_{10} , δ_{20} , δ_{11} , $\delta_{12/21}$, δ_{22} :

5) Resolva a equação $\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$

6) Determine todas as Reações de apoio usando as equações da estática.

2) Determine os valores das Reações de Apoio da Estrutura Hiperestática a seguir, usando a tabela de Kurt Beyer. Considere $EI = 25000 \text{ kNm}^2$.



Resolução

- 1) Determine o Grau de Hiperestaticidade;

- 2) Determine o Sistema Principal (S_0), e o(s) sistema(s) virtual(ais);

3) Elabore o Diagrama de Momento Fletor de cada Sistema (use uma folha extra para os cálculos);

4) Determine os valores de δ_{10} , δ_{20} , δ_{11} , $\delta_{12/21}$, δ_{22} :

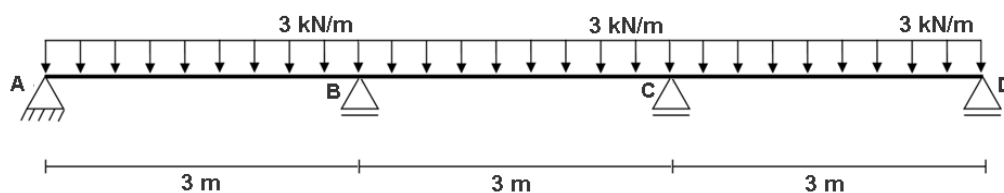
5) Resolva as equações:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X1 + \delta_{12} \cdot X2 = 0$$

$$\delta_{20} + \delta_{21} \cdot X1 + \delta_{22} \cdot X2 = 0$$

6) Calcule o valor das reações de apoio usando as equações da estática.

3) Determine os valores das Reações de Apoio da Estrutura Hiperestática a seguir, usando a tabela de Kurt Beyer. Considere $EI = 25000 \text{ kNm}^2$.



Resolução

- 1) Determine o Grau de Hiperestaticidade;

- 2) Determine o Sistema Principal (S_0), e o(s) sistema(s) virtual(ais);

3) Elabore o Diagrama de Momento Fletor de cada Sistema (use uma folha extra para os cálculos);

4) Determine os valores de δ_{10} , δ_{20} , δ_{11} , $\delta_{12/21}$, δ_{22} :

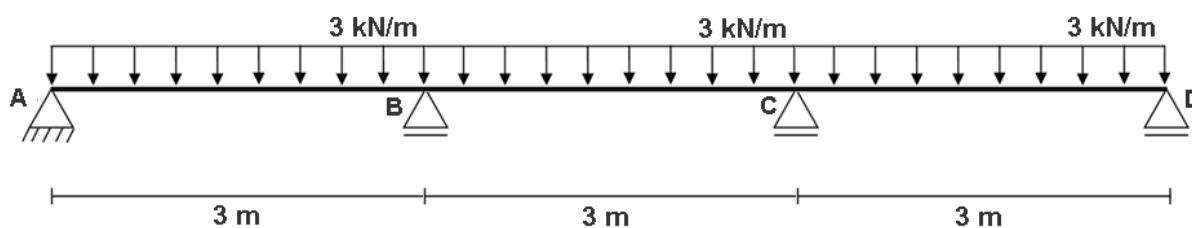
5) Resolva as equações:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X1 + \delta_{12} \cdot X2 = 0$$

$$\delta_{20} + \delta_{21} \cdot X1 + \delta_{22} \cdot X2 = 0$$

6) Calcule o valor das reações de apoio usando as equações da estática.

4) Determine os valores das Reações de Apoio da Estrutura Hiperestática a seguir, usando a tabela de Kurt Beyer. Considere $EI = 25000 \text{ kNm}^2$. **Resolva utilizando rótulas e momentos.**



Resolução

- 1) Determine o Grau de Hiperestaticidade;
- 2) Determine o Sistema Principal (S_0), e o(s) sistema(s) virtual(ais);

3) Elabore o Diagrama de Momento Fletor de cada Sistema (use uma folha extra para os cálculos);

4) Determine os valores de δ_{10} , δ_{20} , δ_{11} , $\delta_{12/21}$, δ_{22} :

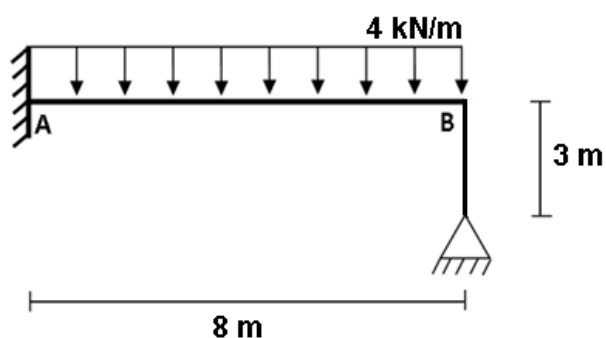
5) Resolva as equações:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X1 + \delta_{12} \cdot X2 = 0$$

$$\delta_{20} + \delta_{21} \cdot X1 + \delta_{22} \cdot X2 = 0$$

6) Calcule o valor das reações de apoio usando as equações da estática.

5) Determine os valores das Reações de Apoio da Estrutura Hiperestática a seguir, usando a tabela de Kurt Beyer. Considere $EI = 25000 \text{ kNm}^2$.



Resolução

- 1) Determine o Grau de Hiperestaticidade;
- 2) Determine o Sistema Principal (S_0), e o(s) sistema(s) virtual(ais);

3) Elabore o Diagrama de Momento Fletor de cada Sistema (use uma folha extra para os cálculos);

4) Determine os valores de δ_{10} , δ_{20} , δ_{11} , $\delta_{12/21}$, δ_{22} :

5) Resolva as equações:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X1 + \delta_{12} \cdot X2 = 0$$

$$\delta_{20} + \delta_{21} \cdot X1 + \delta_{22} \cdot X2 = 0$$

6) Calcule o valor das reações de apoio usando as equações da estática.

Curso Análise de Estruturas - Hiperestática

CANAL O CALCULISTA



➤ **Módulo IX**
Método dos
Deslocamentos

Módulo IX – Método dos Deslocamentos

9. Método dos Deslocamentos

Neste módulo vamos aprender a resolver estruturas hiperestáticas utilizando o *Método dos Deslocamentos*.

O Método dos Deslocamentos, é um método dual ao Método das Forças. Neste método as incógnitas principais do problema são deslocamentos e rotações. Todas as outras incógnitas são expressas em termos das incógnitas principais escolhidas e substituídas em equações de equilíbrio, que depois são resolvidas. Diferente do Método das Forças, a sequência de introdução das condições básicas é inversa:

- 1º - Condições de contorno;
- 2º - Leis Constitutivas dos materiais;
- 3º - Condições de equilíbrio;

O número de incógnitas no método dos deslocamentos é igual ao número de incógnitas excedentes nas equações de compatibilidade.

“Cada caso vai satisfazer isoladamente as condições de compatibilidade (continuidade interna e compatibilidade com respeito aos vínculos externos da estrutura). Entretanto, os casos básicos não satisfazem as condições de equilíbrio da estrutura original, pois são necessários forças e momentos adicionais para manter o equilíbrio. As condições de equilíbrio da estrutura ficam restabelecidas quando se superpõem todas as soluções básicas. (Martha, 2010).”

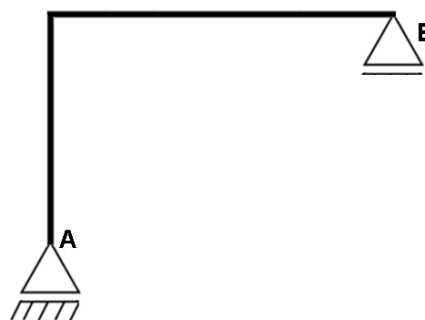
9.1– Deslocabilidades e sistema hipergeométrico

As *Deslocabilidades* são as componentes de deslocamentos e rotações nodais que estão livres, isto é, que dever ser conhecidas para determinar a configuração deformada de uma estrutura. As Deslocabilidades (D_i) são as incógnitas do método dos deslocamentos.

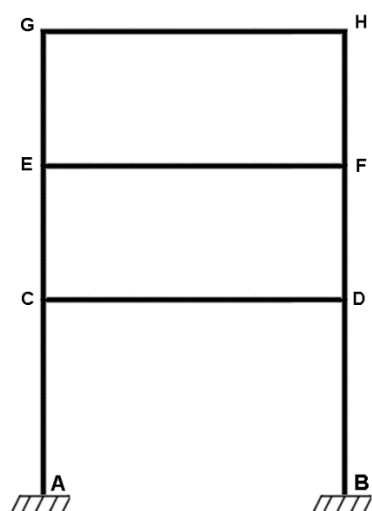
Exemplo:



() Deslocável () Indeslocável



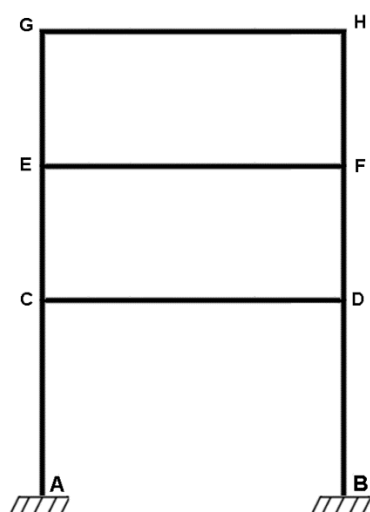
() Deslocável () Indeslocável



() Deslocável () Indeslocável

Além dos deslocamentos devemos analisar a possibilidade de *Rotação* na estrutura. Cada Rotação também contará na sua *deslocabilidade*.

Ex.:

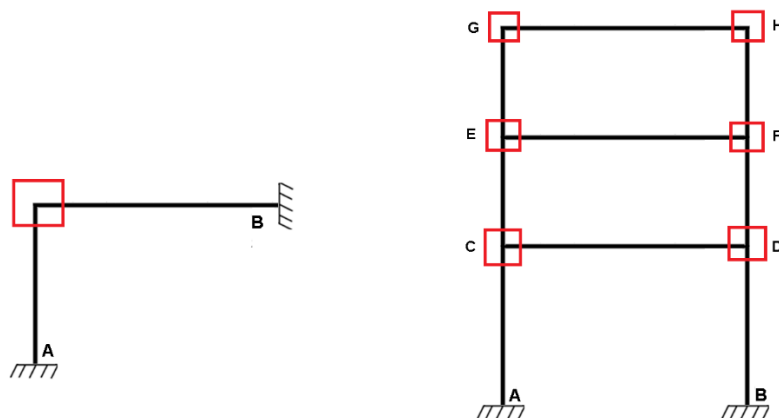


Uma estrutura que tem todas as Deslocabilidades definidas é denominada estrutura cinematicamente determinada.

O modelo estrutural utilizado nos casos básicos é o de uma estrutura cinematicamente determinada obtida a partir da estrutura original pela adição de vínculos na forma de apoios fictícios. Esse modelo é chamado de *sistema hipergeométrico* (SH).

O SH é utilizado para isolar as diversas componentes cinemáticas da estrutura, isto é, isolando os efeitos de cada uma das suas Deslocabilidades.

Ex.:

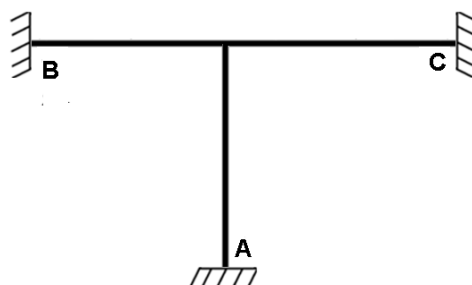


9.2– Grau Hipergeométrico.

A determinação do grau hipergeométrico é a quantidade de deslocabilidade da estrutura (translação) somado ao número de rotações nodais e as rotações de extremidades, em resumo:

$$Gh = n^{\circ} \text{ de deslocabilidade (translação)} + n^{\circ} \text{ de rotações nodais} + n^{\circ} \text{ de rotações de extremidade.}$$

Exemplo 1- Determine o Grau Hipergeométrico das estruturas abaixo:

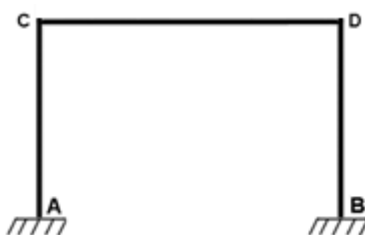


$$Gh = n^{\circ} \text{ de deslocabilidade (translação)} + n^{\circ} \text{ de rotações nodais} + n^{\circ} \text{ de rotações de extremidade.}$$

$$Gh = 0 + 1 + 0$$

$$Gh = 1$$

Exemplo 2 –

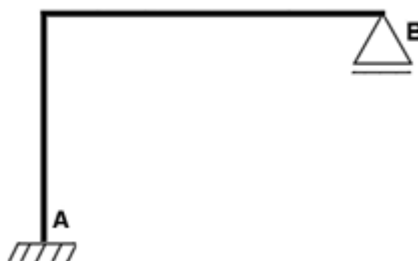


$Gh = n^{\circ} \text{ de deslocabilidade (translação)} + n^{\circ} \text{ de rotações nodais} + n^{\circ} \text{ de rotações de extremidade.}$

$$Gh = 1 + 2 + 0$$

$$Gh = 3$$

Exemplo 3 –



$Gh = n^{\circ} \text{ de deslocabilidade (translação)} + n^{\circ} \text{ de rotações nodais} + n^{\circ} \text{ de rotações de extremidade.}$

$$Gh = 1 + 1 + 1$$

$$Gh = 3$$

9.3 - Matriz de flexibilidade e vetor dos termos de carga

No Método das Forças a matriz de rigidez era a seguinte:

$$\begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} x \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resultando no sistema:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases}$$

Reescrevendo o sistema de equações de equilíbrio para o Método dos Deslocamentos temos:

$$\begin{Bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} x \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Onde,

β_i = Reação no apoio fictício associado à deslocabilidade D_i para equilibrar o SH quando atua a solicitação externa isoladamente.

K_{ij} = Coeficiente de rigidez global: força ou momento que deve atuar na direção de D_i para manter o equilíbrio no SH.

D_i = Deslocabilidade de uma estrutura: componente de deslocamento ou rotação livre (não restrita por apoio) em um nó da estrutura, na direção de um dos eixos globais.

$\{\beta_0\}$ = *vetor de termos de carga*;

$[K]$ = *matriz de rigidez global*;

$\{D\}$ = *vetor de deslocabilidade*;

Resultando no sistema:

$$\begin{aligned}\beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 &= 0 \\ \beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 &= 0\end{aligned}$$

No caso geral, podemos escrever:

$$\{\beta_0\} + [K]\{D\} = \{0\}$$

9.4– Convenções de sinais do Método dos Deslocamentos.

Os sinais positivos são considerados nos seguintes sentidos:

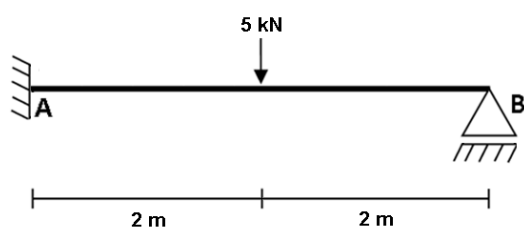
Forças Horizontal	
Força Vertical	
Momento	

9.5– Tabelas de Grinter

Assim como no método das forças usaremos as seguintes tabelas para a resolução do método dos deslocamentos. Deixarei disponível em PDF para que possam imprimir com mais qualidade.

Vamos então para os exercícios.

1) Determine os valores das Reações de Apoio da Estrutura Hiperestática a seguir, usando o Método dos Deslocamentos. Considere $EI = 25000 \text{ kNm}^2$.



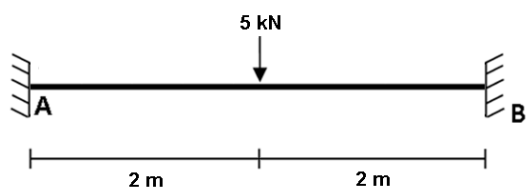
1º - Calcular o Grau Hipergeométrico.

$$Gh = N^{\circ} \text{ de Deslocabilidade} + N^{\circ} \text{ de rotações nodais} + N^{\circ} \text{ rotações de extremidade}$$

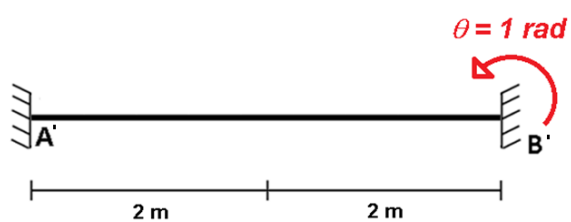
2º Passo – Montar a o sistema principal (S_0) e o(s) sistema(s) auxiliar(es) ($S_1, S_2, \dots$).

3º Passo – Encontrar as Reações para todos os Sistemas (S_i) com auxílio das tabelas.

Sistema Principal - S_0



Sistema Auxiliar 1 - S_1



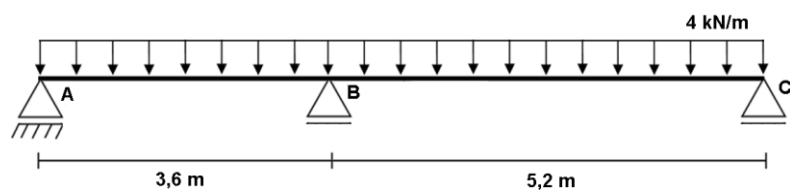
4º Passo – Calcular os valores de β_{ij} e K_{ij} .

5º Passo – Calcular os valores de D_i usando a matriz de flexibilidade.

$$\beta_{10} + K_{11} \cdot D_1 = 0$$

6º Passo – Encontre as Reações de Apoio da Estrutura original.

2) Determine os valores das Reações de Apoio da Estrutura Hiperestática a seguir, usando o Método dos Deslocamentos. Considere $EI = 25000 \text{ kNm}^2$.



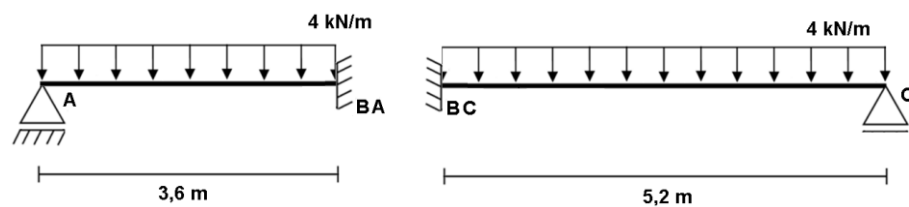
1º - Calcular o Grau Hipergeométrico.

$$Gh = N^\circ \text{ de Deslocabilidade} + N^\circ \text{ de rotações nodais} + N^\circ \text{ rotações de extremidade}$$

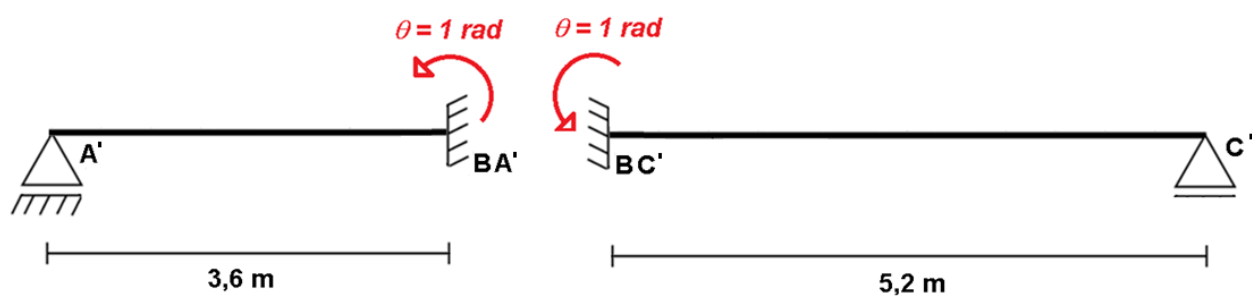
2º Passo – Montar a o sistema principal (S_0) e o(s) sistema(s) auxiliar(es) ($S_1, S_2, \dots$).

3º Passo – Encontrar as Reações para todos os Sistemas (S_i) com auxílio das tabelas.

Sistema Principal - S_0



Sistema Auxiliar 1 - S_1



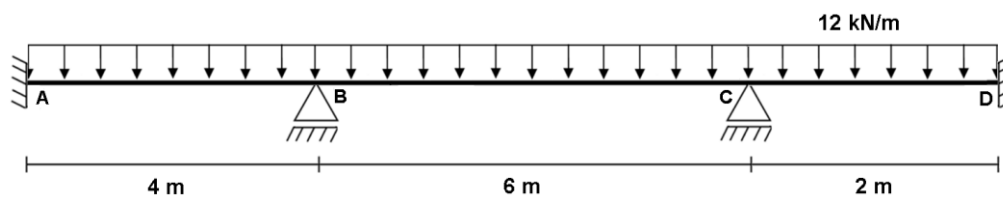
4º Passo – Calcular os valores de β_{ij} e K_{ij} .

5º Passo – Calcular os valores de D_i usando a matriz de flexibilidade.

$$\beta_{10} + K_{11} \cdot D_1 = 0$$

6º Passo – Calcular as Reações de Apoio da estrutura original.

3) Determine os valores das Reações de Apoio da Estrutura Hiperestática a seguir, usando o Método dos Deslocamentos. Considere $EI = 25000 \text{ kNm}^2$.



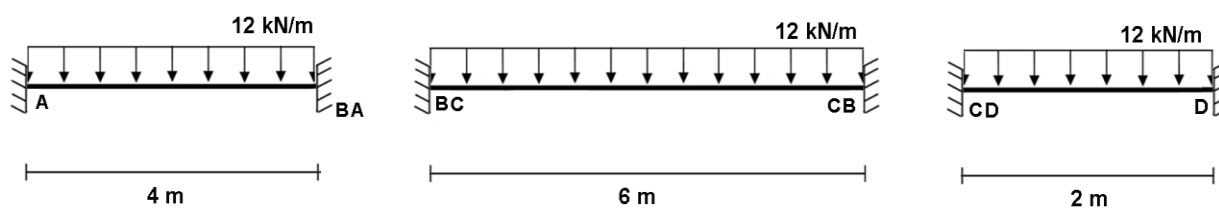
1º - Calcular o Grau Hipergeométrico.

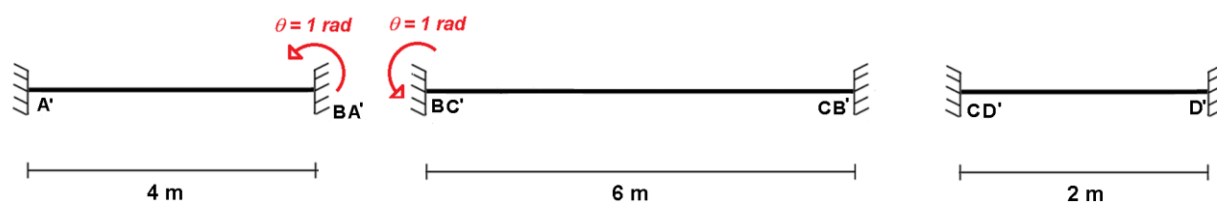
$$Gh = N^\circ \text{ de Deslocabilidade} + N^\circ \text{ de rotações nodais} + N^\circ \text{ rotações de extremidade}$$

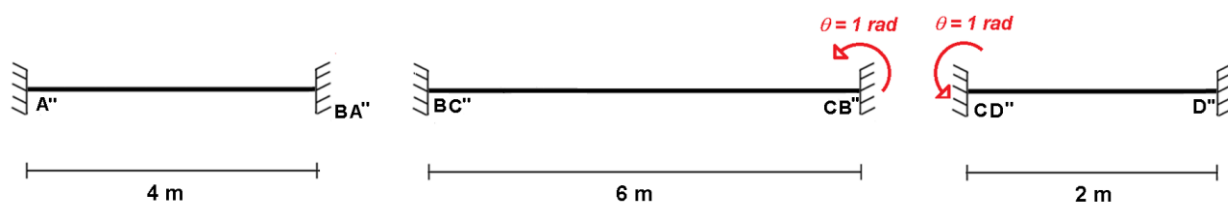
2º Passo – Montar a o sistema principal (S_0) e o(s) sistema(s) auxiliar(es) ($S_1, S_2, \dots$).

3º Passo – Encontrar as Reações para todos os Sistemas (S_i) com auxílio das tabelas.

Sistema Principal - S_0



Sistema Auxiliar 1 - S_1 

Sistema Auxiliar 2 - S_2 

4º Passo – Calcular os valores de β_{ij} e K_{ij} .

5º Passo – Calcular os valores de D_i usando a matriz de flexibilidade.

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{10} + K_{11} \cdot D_1 + K_{12} \cdot D_2 = 0 \\ \beta_{20} + K_{21} \cdot D_1 + K_{22} \cdot D_2 = 0 \end{array} \right.$$

6º Passo – Calcular as Reações de Apoio da estrutura original.